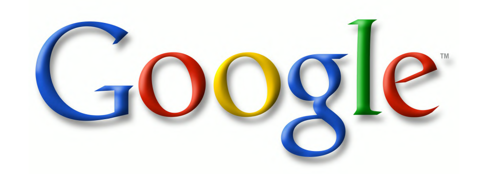



NEW YORK PUBLIC LIBRARY







Sammlung Göschen

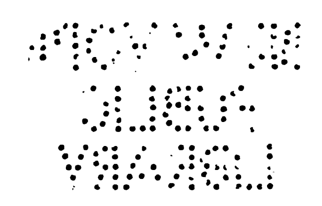
Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate

von

Wilh. Weitbrecht
Professor der Geodäsie in Stuttgart

Mit 15 Figuren und 2 Tafeln

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1906



Spamersche Buchdruckerei in Leipzig-R.

Inhaltsverzeichnis.

1*

II. Abschnitt.

Vermittelnde Beobachtungen.

1. Kapitel.

Fortpflanzung von Beobachtungsfehlern auf Funktionen der Beobachtungsgrößen.

2. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder gleich genauer Beobachtungen.

3. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

4. Kapitel.

Anwendung der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen auf trigonometrische Punkteinschaltung.

III. Abschnitt.

Bedingte Beobachtungen.

Einleitung.

Bei der Feststellung von Tatsachen und Größen mittels sinnlicher Wahrnehmung sind wir Irrtümern und Fehlern unterworfen, welche teils der menschlichen Unvollkommenheit, teils der Mangelhaftigkeit der angewandten Hilfsmittel und Methoden entspringen. Dies zeigt sich, sobald irgend ein von mehreren Menschen beobachteter Vorgang genau festgestellt werden will, oder wenn auch nur ein einziger Beobachter die Ausdehnung oder die physikalischen Eigenschaften eines und desselben Gegenstandes mehrmals unabhängig bestimmt. Es zeigt sich auch, wenn man mehrere Größen, welche vermöge eines Naturgesetzes in bestimmter Beziehung zueinander stehen, einzeln und unabhängig mißt (z. B. die beiden Katheten und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, die drei Winkel eines Dreiecks usw.).

Will man daher Widersprüche in der Feststellung von Größen oder Tatsachen vermeiden, so muß man entweder die Augen vor etwa vorhandenen überschüssigen und daher unter allen Umständen widersprechenden Beobachtungsergebnissen verschließen, oder — auf überschüssige Beobachtungen überhaupt verzichten. Beide Auskunftsmittel wären identisch mit dem Verfahren eines Richters, der über jeden einzelnen Vorgang nur einen einzigen Zeugen hören wollte, auch wenn er von mehreren mehr oder weniger abweichend beobachtet wurde. Das Ergebnis *einer solchen* Untersuchung hätte wenig Aussicht, die

Wahrheit zu treffen. Dagegen wird man der gesuchten Wahrheit um so näher kommen, je mehr Beobachtungen bei der Feststellung eines Vorganges oder einer Größe berücksichtigt werden und je zuverlässiger sie sind.

Wollen wir alle, teilweise widersprechenden Beobachtungen zu einem einheitlichen Ergebnis — dem richterlichen Urteil gleich — verarbeiten, so müssen wir jede von dem ihr anhaftenden Fehler zu befreien, „auszugleichen" suchen. Auf sachlichem Gebiet kann die Fehlerursache außer in der Unzulänglichkeit unserer Sinne bloß noch in der Mangelhaftigkeit der verwendeten Methoden und Instrumente liegen. Die Untersuchung von Größe und Ursache der Fehler liefert daher neben ihrem eigentlichen Zwecke (der Schaffung eines einheitlichen Resultates) noch wertvolle Fingerzeige für künftige Einschränkung der Beobachtungsfehler.

§ 1. Einteilung der Beobachtungsfehler.

Die Ursache, welcher ein Fehler seine Entstehung verdankt, ist häufig auch bestimmend für dessen Eigenschaft und Größe, so daß man umgekehrt aus letzteren häufig auf die Ursache schließen kann.

Entspringt der Fehler z. B. äußeren Einflüssen (Witterungsunbilden und anderen Naturereignissen, Böswilligkeit dritter usw.), oder ungewöhnlicher Nachlässigkeit des Beobachters, so läßt er die Beobachtungsgröße meist um erhebliche Beträge und zwar ebenso wahrscheinlich in der einen, wie in der anderen Richtung unrichtig erscheinen, er ist ein „grober Fehler".

Die groben Fehler lassen sich in den meisten Fällen vermeiden, jedenfalls aber durch überschüssige Beobachtungen und geeignete Beobachtungsverfahren ihrer Größe und Richtung nach erkennen und ausmerzen. Sie gehören

nicht zu denjenigen, welche der Ausgleichung unterliegen, und wir werden uns mit ihnen im folgenden nicht beschäftigen.

Außer diesen, sowohl nach Richtung und Größe, als auch nach ihrer Ursache meist leicht erkennbaren groben Fehlern gibt es aber noch kleinere Fehler (Abweichungen des Beobachtungsresultates vom wahren Wert), die sich zwar durch geeignete Hilfsmittel und Beobachtungsverfahren und namentlich durch erhöhte Aufmerksamkeit und Erfahrung des Beobachters wesentlich einschränken, niemals aber ganz vermeiden lassen. — Die Feststellung dieser unvermeidlichen Fehler an den Beobachtungsergebnissen nach wahrscheinlicher Ursache und Größe und ihre Ausmerzung bildet die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung.

Auch sie zeigen übrigens bei näherem Zusehen prinzipielle Verschiedenheiten, die der Verschiedenartigkeit der Fehlerquellen entstammen, und die uns zwingen, sie in zwei Gruppen getrennt zu betrachten. Wenn es nämlich im einzelnen Beobachtungsfall auch kaum möglich ist, jede einzelne Fehlerquelle und ihren Anteil am schließlichen Gesamtfehler der Beobachtungsgröße festzustellen, so zeigt doch die einfachste Überlegung, daß die eine Fehlerursache eine nach ihrem Vorzeichen sich gleich bleibende, in gesetzmäßiger Abhängigkeit von der Beobachtungsgröße wachsende Fehlerwirkung ausüben kann, während die andere einen Fehleranteil erzeugt, der nach Größe und Vorzeichen von Beobachtung zu Beobachtung wechselt. Wird z. B. eine Strecke durch mehrfaches Anlegen eines Maßstabes gemessen, der um ein gewisses, wenn auch kaum erkennbares Maß zu kurz ist, so liefert dieser Maßstab, falls sein Längenabmangel die einzige Fehlerquelle

darstellt, unter allen Umständen ein zu großes Maß für die Strecke, und zwar wächst der hieraus entspringende Streckenfehler proportional zur festgestellten Anzahl von Maßstablagen, also proportional zur Streckenlänge. Einen solchen Fehler nennt man „regelmäßigen Fehler“.

Hat umgekehrt der Maßstab zwar die richtige Länge, schleicht sich aber bei jeder neuen Lage ein zufälliger kleiner Anlegefehler ein, so wird dieser ebenfalls das Gesamtresultat der Strecke schädlich beeinflussen. Da aber der Fehler in der Maßstablage gleich wahrscheinlich in der Vorwärts- wie in der Rückwärtsrichtung wirken kann, so werden einige der entsprechenden, positiv wirkenden Fehlerelemente einige der negativen aufheben. Als Gesamtwirkung dieser Fehlerquelle auf die Strecke wird daher nur der Überschuß der einen Fehlerrichtung über die andere auftreten. Dieser kann ebensogut positiv wie negativ, und wird seiner absoluten Größe nach im günstigsten (aber unwahrscheinlichen) Fall $= 0$ sein, wenn nämlich die Gesamtwirkung der positiven gleich derjenigen der negativen Fehlerteile ist. Im ungünstigsten, ebenso unwahrscheinlichen Fall (wenn alle Fehlerelemente in gleicher Richtung wirken) wäre die Gesamtwirkung, wie im Fall des regelmäßigen Fehlers, proportional zur Streckenlänge. Weder der eine noch der andere dieser äußersten Fälle wird regelmäßig auftreten. Sicher ist daher, daß die wahrscheinliche Gesamtwirkung dieses „zufälligen“ (unregelmäßigen) Fehlers langsamer wächst, als die des regelmäßigen Fehlers.

Wenn nach Vorstehendem das Wachstum des regelmäßigen und des unregelmäßigen Fehlers verschiedenen Gesetzen folgt, und wenn weiter die Möglichkeit vorliegt, daß beide Fehlergruppen in den auszugleichenden Beob-

achtungsresultaten gleichzeitig auftreten, so wird nur di Trennung beider die richtige Erkenntnis der Fehle ursachen und die Fehlerverbesserung an der richtige Stelle ermöglichen.

Eine solche Trennung läßt sich in einzelnen Fälle durch einfache Überlegung ermöglichen.

Wird z. B. ein und dieselbe Größe (etwa eine Strecke mit denselben Geräten unter denselben äußeren Um ständen und nach derselben Methode mehrmals gemesse und weisen die Messungsresultate Unterschiede auf, di zu klein sind, um als Folgen grober Fehler angesehe werden zu können, so können diese Unterschiede nur zu fälligen, unregelmäßigen Fehlerquellen entspringe Sind aber die verschiedenen Wiederholungen der Messun je mit anderen Geräten nach anderen Methoden ode unter veränderten Umständen ausgeführt worden, s können die kleinen Unterschiede zwischen den verschie denen Resultaten ebensowohl zufälligen, als regel mäßigen Fehlern und ihrem Zusammenwirken ent springen. Durch Vergleichung beider Fehlerbeträge könne wir den Anteil beider Gruppen von Fehlern am Gesamt unterschied ermitteln.

§ 2. Wahrscheinlichster Wert einer Größe aus eine Reihe gleich genauer, mit zufälligen Fehlern behaftete Beobachtungsresultate.

Ist die Beobachtung einer Größe mit denselben Hilfs mitteln und Methoden und unter denselben äußeren Verhält nissen mehrfach ausgeführt worden, kann also jedes der er haltenen, um geringe Beträge voneinander abweichende Resultate als gleich zuverlässig angesehen werden, so würd die Annahme irgend eines dieser Beobachtungsresultate al *endgültigen* Wertes der Beobachtungsgröße eine Vergewa

tigung der übrigen und eine nutzlose unwirtschaftliche Arbeitsvergeudung darstellen. Denn letztere hätten, falls es sich bei ihrer Beobachtung etwa nur um Schutz gegen grobe Fehler handelte (Kontrollbeobachtungen), zum mindesten mit geringerem Aufwand an Sorgfalt und Zeit ermittelt werden können. Wählen wir dagegen den endgültigen Wert der Beobachtungsgröße unter gleichmäßiger Berücksichtigung aller beobachteten Einzelwerte aus, so erzielen wir damit zweifellos eine Genauigkeitssteigerung, weil zum mindesten ein Teil der zufälligen, ebenso wahrscheinlich positiven wie negativen Einzelfehler sich dabei aufhebt.

Die Voraussetzung, daß sämtliche Beobachtungen mit gleicher Sorgfalt, also vermutlich auch gleicher Genauigkeit ausgeführt sind, führt zum Zweck der Auswahl eines endgültigen ausgeglichenen Mittelwertes L für die Beobachtungsgröße zu der Forderung, an sämtlichen Beobachtungswerten l gleich große, im Vorzeichen wechselnde Verbesserungszuschläge v anzubringen, welche dem bei der Beobachtung eingeschlichenen gleich wahrscheinlich positiven wie negativen und gleich großen zufälligen Fehler entsprechen. Diese Forderung läßt sich aber nur im Fall zweifacher Beobachtung erfüllen.

Trägt man nämlich die Beobachtungswerte l_1 l_2 ... als Ordinaten zu einer beliebigen Abszisse auf (Fig. 1a), so läßt sich nur dann ein Punkt finden, der von den Endpunkten der Ordinaten gleichen Abstand v hat, wenn die Zahl der letzteren $=2$ ist.

In diesem Fall sind die Verbesserungszuschläge $v_1 = -v_2$. Legt man der vom Endpunkt der l aus in der Ordinatenrichtung verlaufenden Verbesserung v das Vorzeichen $+$, der andern das Vorzeichen $-$ bei, so wird

$$(1) \qquad v_1 + v_2 = 0$$

und

$$\begin{array}{l} L = l_1 + v_1 \\ L = l_2 + v_2 \\ \hline L = \dfrac{l_1 + l_2 + v_1 + v_2}{2} = \dfrac{l_1 + l_2}{2}. \end{array}$$

Ist die Zahl der Beobachtungswiederholungen 2^n und trägt man die Beobachtungswerte $l_1 \ldots$ als Ordinaten

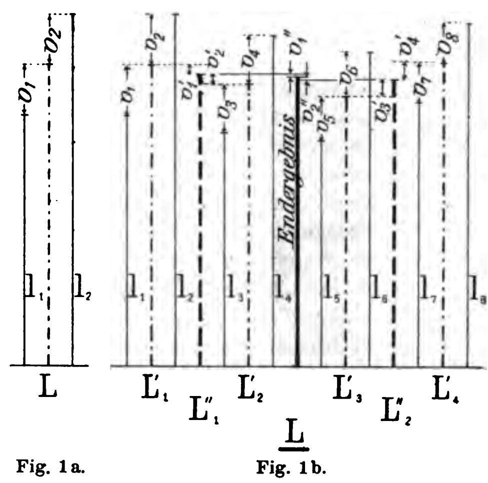


Fig. 1 a. Fig. 1 b.

zu beliebigen Abszissen auf, so ist es unmöglich, eine Parallele zur Abszisse zu ziehen, deren Abstände v von allen Ordinatenendpunkten gleich groß sind. Wir müssen also auf die Forderung verzichten:

$$\text{absolut } v_1 = \text{absolut } v_2 = \cdots = \text{absolut } v_r = \cdots$$

(Fig. 1 b). Immerhin kann man zwei der Beobachtungswerte, z. B. l_1 und l_2, zu einem Resultat $L_1' = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$

zusammenfassen, ebenso $\frac{l_3 + l_4}{2} = L'_2$ usw. und erhält damit ebenso viele Werte L', als Beobachtungspaare vorhanden sind. Gleichzeitig ist dann wie vorhin

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 = 0 \\ v_3 + v_4 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \end{array}\right\} [v]^{*)} = 0\,.$$

Faßt man jetzt je zwei der so gefundenen Werte L' wieder zu einem Wert L'' zusammen und heißt die an den Werten L' anzubringenden Verbesserungen v', so ist wieder

$$\left.\begin{array}{l} v'_1 + v'_2 = 0 \\ v'_3 + v'_4 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \end{array}\right\} [v'] = 0$$

und man hat nur noch den vierten Teil der ursprünglichen Beobachtungswerte.

Fährt man mit der paarweisen Zusammenfassung der gewonnenen Werte zu Mittelwerten L''', L'''' ... fort, wobei wieder

$$[v''] = 0$$
$$[v'''] = 0 \quad \text{usw.},$$

so bleibt schleißlich ein Wert L als endgültiger Mittelwert übrig. Heißen die an den ursprünglichen Beobachtungswerten l anzubringenden Zuschläge, welche nötig sind, um sie auf diesen Mittelwert L zu bringen, V, so wird:

$$(1) \quad (L - l_1) + (L - l_2) + \cdots = [v] + [v'] + [v''] + \cdots = [V] = 0$$

*) Das von K. F. Gauß (geb. 30. April 1777, gest. 23. Febr. 1855), dem Begründer der Methode der kleinsten Quadrate, eingeführte Zeichen [ ], für die Summe einer endlichen Zahl gleichartiger Größen, entsprang dem griechischen Σ = Summe aller. Der einfacheren Schreibweise halber entstand daraus [und, zur genauen Begrenzung des zusammenzufassenden Ausdrucks, [ ]. Es wird aus sachlichen und aus Gründen der Pietät im folgenden beibehalten werden.

als Eigenschaft des endgültigen Mittelwertes L aus einer Anzahl 2^n gleich genauer Beobachtungen.

Die in (1) gefundene Eigenschaft des endgültigen Mittelwertes L aus einer Anzahl 2^n nur mit zufälligen Fehlern behafteter, gleich genauer Beobachtungen l wohnt dem wahrscheinlichen Mittelwerte inne, auch wenn die Beobachtungszahl nicht gerade $= 2^n$ ist. Denn die ungefähr gleich großen zufälligen Beobachtungsfehler V werden gleich wahrscheinlich positiv wie negativ auftreten, sich also bis auf einen im Vergleich zu $[l]$ sehr kleinen Rest um so eher aufheben, je größer die Zahl der Beobachtungen l ist. Mit großer Wahrscheinlichkeit dürfen wir daher Gleichung (1) als allgemein gültige Bedingung für die Auswahl des wahrscheinlichsten Mittelwertes L einer beliebigen Anzahl gleich genauer Beobachtungen l festsetzen. Wir gewinnen damit allerdings nur eine Hypothese für ein Naturgesetz, die aber um so gesicherter ist, je mehr daraus zu ziehende Schlüsse mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Wie man nun aber auch den wahrscheinlichsten Wert L der Beobachtungsgröße wählen möge, immer wird die Beziehung bestehen:

Verbesserung $V = L - l$, oder (wenn man V durch v ersetzt):

$$\begin{array}{l} L = l_1 + v_1 \\ L = l_2 + v_2 \\ \quad\vdots \quad\ \ \vdots \\ L = l_n + v_n \\ \hline nL = [l] + [v]. \end{array}$$

Für (1): $[v] = 0$ wird daraus

(2) Endwert $L = \frac{[l]}{n} =$ dem arithmetischen Mittel der Beobachtungswerte, übereinstimmend mit unserem *natürlichen Empfinden.*

Wir erkennen, daß jeder neue Beobachtungswert l einen neuen Widerspruch v gegen den Mittelwert L und damit eine kleine Veränderung des letzteren bedingt. Je größer aber die Zahl n der zur Mittelbildung bereits verwendeten Beobachtungswerte l und je größer ihre Genauigkeit ist, um so geringer wird der Einfluß einiger neu hinzukommender Beobachtungswerte auf das Endergebnis sein. Die Veränderung des Endresultates durch neu hinzutretende Beobachtungswerte würde aber erst dann gleich 0, wenn die Zahl der bereits verwendeten ∞ groß wäre. Dann hätte man den auf dem Weg der Beobachtung tatsächlich unerreichbaren wahren Wert der Beobachtungsgröße gefunden.

§ 3. Grundbedingung für die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Einteilung der Ausgleichungsaufgaben.

Die Bedingung (1) führt auf einem sehr einfachen Weg zur eindeutigen Erlangung des wahrscheinlichsten Wertes L aus einer Anzahl gleich genauer Beobachtungen l, wenn, graphisch betrachtet, die gesuchte Ausgleichungslinie (s. Fig. 1 b) ihrer Richtung nach (hier als Parallele zur x-Achse) zum voraus bekannt ist. Trifft dies nicht zu, so genügt die Bedingung $[v] = 0$ nicht zur eindeutigen Auswahl dieser Ausgleichungslinie. Ist z. B. die beobachtete Größe L (statt wie bisher konstant) abhängig von einer zweiten veränderlichen Größe, so kann man zwar die Beobachtungswerte l, wie in Fig. 1 a und 1 b, als Ordinaten und zwar diesmal zu den korrespondierenden Werten der zweiten Veränderlichen als Abszissen aufzeichnen.

Mögen z. B. bei gleich bleibender Temperatur, aber veränderlichem Luftdruck an einem Quecksilber- und gleichzeitig an einem Federbarometer korrespondierende Ablesungen gemacht worden sein, um die Beziehung zu finden zwischen der *Anzahl von Teilen,* um welche sich der Zeiger des Aneroid-

barometers fortbewegt, und der Anzahl von mm sich aus denselben Ursachen die Höhe der Que verändert. Es sei ferner festgestellt worden, daß Beziehung zwischen den Quecksilberhöhen b und ablesungen a von lineare

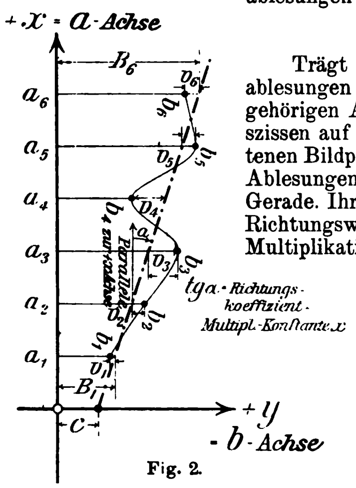


Fig. 2.

$$b = a x + c$$

Trägt man nun die ablesungen b als Ordinate gehörigen Aneroidablesun szissen auf und verbindet tenen Bildpunkte, so ist be Ablesungen deren Verbind Gerade. Ihr Richtungskoef Richtungswinkels) stellt Multiplikationskonstante a schnitt auf die (uns zu interessierer nalkonstant aber die Al beiden Bar kleinen Feh welche zur daß die Ver der Bildpunl rade wird, v der letzteren >2, d. h. wenn Überbestimmung v **Die Abweichungen einer den Bildpunkten möglichs Geraden von diesen sind auch hier nichts anderes, besserungen v (s. Fig. 2), welche an den Quecksilbe anzubringen sind, damit die der Aneroidablesung a e g e m i t t e l t e Quecksilberablesung B erschein gebraische Summe wir laut Bedingung (1) = sollen.**

Nun kann man aber jede Richtung paral selbst so verschieben, daß schließlich [algebr. jede liefert ein anderes c und x, d. h. es gi lich viele Gerade, welche der geste *dingung* $[v] = 0$ entsprechen. Zur Auswa

möglichen Ausgleichungslinie brauchen wir eine weitere Bedingung, welche die unter (1) aufgestellte ersetzt oder ergänzt. Als solche weitere Bedingung könnte man etwa wählen:

$$[\text{absolut } v] = \text{Minimum}.$$

Diese Form wurde in der Tat von Laplace im Jahre 1802 aufgestellt und begründet.

Sie leidet aber an verschiedenen Mängeln. In erster Linie tut sie den Verbesserungen v, welche ohne Vorzeichen undenkbar sind, Zwang an, indem sie ihnen das Vorzeichen raubt.

Sodann verursacht die Aufstellung eines allgemein gültigen Ausdruckes für den absoluten Wert jedes einzelnen v oder für deren Summe [abs. v], welche zum Minimum werden soll, erhebliche Schwierigkeiten. Denn je nach der Größe des Beobachtungswertes l, bzw. desjenigen von L ist abwechselnd abs. $v = L - l$ oder abs. $v = l - L$.

Endlich nimmt die Bedingung [abs. v] = Min. keine Rücksicht auf die Wertung der einzelnen Beobachtungsfehler v nach ihrer Größe. Handelt es sich nämlich darum, die Güte einer Beobachtungsreihe im ganzen zu beurteilen, so wird man dazu am besten den Wert derjenigen Funktion der Beobachtungsfehler v verwenden, die man zum Zweck und anläßlich der Auswahl des bestmöglichen Mittelwertes L zum Minimum gemacht hat, im vorliegenden Fall also [abs. v] oder

$$(3) \qquad d = \frac{[\text{abs. } v]}{n}.$$

Der Wert d stellt dabei den absoluten Durchschnittswert aus n Beobachtungsfehlern v, den „durchschnittlichen Fehler einer Beobachtung“ vor.

Möge nun z. B. ein bestimmter Beobachter mit einem gewissen Instrument und unter Einhaltung einer gewissen Messungsmethode beim Nivellement gleich langer geschlossener Schleifen etwa folgende Abschlußdifferenzen gegen den (in diesem Fall bekannten) Sollwert 0 erzielt haben:

Schleife	Abschlußdifferenz v + mm	Abschlußdifferenz v − mm
1	4	
2	5	
3		6
4	5	
5		5
6	5	
7		5
8		6
9	5	
10		4
	24	26

$[\text{abs. } v] = 50$

$$d = \frac{[\text{abs. } v]}{n} = 5\,.$$

Ein zweiter Beobachter habe dagegen beim Nivellement derselben Schleifen mit anderem Instrument und nach anderer Methode folgende Abschlußdifferenzen erzielt:

Schleife	Abschlußdifferenz v + mm	Abschlußdifferenz v − mm
1	1	
2		1
3	1	
4		10
5		12
6	0	
7		1
8		0
9		15
10		9
	2	48

$[\text{abs. } v] = 50$

$$d = \frac{[\text{abs. } v]}{n} = 5\,.$$

Beide Beobachtungsreihen zeigen denselben Betrag für [abs. v] und daher denselben durchschnittlichen Fehler d. Trotzdem sind die dadurch ausgeführten Höhenbestimmungen durchaus nicht gleich zuverlässig. Schon der Umstand, daß die Zahl der positiven Abweichungen v in der zweiten Reihe gegenüber derjenigen der negativen erheblich verschieden ist, *widerspricht ihrer Eigenschaft* als zufällige Fehler und weist auf

die Einwirkung grober oder regelmäßiger Fehler hin, die sich möglicherweise bis auf den schließlich festgestellten Betrag gegenseitig aufgehoben haben können.

Noch mehr aber spricht die absolute *Größe der Abschlußdifferenzen* gegen die Gleichwertigkeit der beiden Gruppen von Messungen. Jede dieser Differenzen setzt sich nämlich zusammen aus einer Reihe von in ihrer Ursache und Wirkung teilweise unbekannten Fehlerelementen, die sich teils addieren, teils gegenseitig aufheben. Die Abschlußdifferenz ist nur ihr in die Erscheinung tretender Rest. Ist dieser Rest in den einzelnen Beobachtungsfällen sehr verschieden, so beweist dies, daß die Fehlerelemente selbst verhältnismäßig groß sind, so daß einige von ihnen, welche ausnahmsweise der Regel widersprechen, gleich wahrscheinlich positiv wie negativ zu sein, hinreichen, das Beobachtungsresultat und die Abschlußdifferenz merklich zu beeinflussen. Das zufällige, eben hieraus erklärliche Vorkommen einiger auffallend kleiner Abschlußdifferenzen ändert an der Tatsache der geringen Zuverlässigkeit ebensowenig, als etwa einige zufällige Kernschüsse denjenigen zum hervorragenden Schützen stempeln, der mit anderen seiner Schüsse nicht einmal die Scheibe trifft. Wird ja auch nicht derjenige Mensch als der brauchbarere von zweien angesehen, der zwar im Falle zufällig glücklicher Disposition einmal eine ganz hervorragende Leistung hervorbringt, aber zwischenherein, vielleicht gerade wenn man ihn nötig braucht, versagt!

Sollen aber nach dem Ausgeführten die Beobachtungsfehler v in dem Sinne gewertet werden, daß größere Fehler progressiv wachsend in die Wagschale fallen, so bleibt nichts übrig, als irgend eine *Potenz* von ihnen in Vergleich zu ziehen. Dabei hat eine Potenz mit *geradem* Exponenten noch den Vorzug, das lästige Vorzeichen des Fehlerbetrages v auf natürliche Weise zum Verschwinden zu bringen. Die Frage, *welche* gerade Potenz der v gewählt werden soll, beantwortet sich aus der Eigenschaft der Fehler als Naturerscheinungen, die gewissen (uns zunächst unbekannten) Gesetzen unterworfen sind: Im Zweifelsfalle ist die einfachste Form die richtige, sofern sie anderen, bereits festgestellten Gesetzen (im vorliegenden Falle (1): $[\text{algeb. } v] = 0$ und (2): $L = \frac{[l]}{n}$) *nicht widerspricht.*

Unter letzterer Voraussetzung und an Stelle der als unrichtig erkannten Annahme [abs. v] = Min. setzen wir jetzt für die Wertung der erreichten Beobachtungsgenauigkeit sowohl, als für die Auswahl des wahrscheinlichsten Wertes der Beobachtungsgröße L die Bedingung

$$[v\,v] = \text{Min.} \tag{4}$$

Ob diese Bedingung den für gleich genaue Beobachtungen einleitend bewiesenen, oben angegebenen Gesetzen (1) und (2) nicht widerspricht, untersuchen wir wie folgt:

Behaftet man die an den Beobachtungswerten l anzubringenden Verbesserungsbeträge v mit algebraischen Vorzeichen, so ist allgemein gültig, welcher Wert auch für L gewählt werden möge:

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_1 = L - l_1 & \text{also} & v_1^2 = L^2 - 2\,L\,l_1 + l_1^2 \\ v_2 = L - l_2 & ,, & v_2^2 = L^2 - 2\,L\,l_2 + l_2^2 \\ \vdots & & \vdots \\ v_n = L - l_n & ,, & v_n^2 = L^2 - 2\,L\,l_n + l_n^2 \\ \hline [v] = n\,L - [l] & & [v\,v] = n\,L^2 - 2\,L\,[l] + [l\,l]. \end{array}\right.$$

Soll nun der wahrscheinlichste Wert L so ausgewählt werden, daß $[v\,v]$ = Min., wobei also L die einzige Veränderliche der rechten Seite ist, so muß sein

$$\frac{d\,[v\,v]}{d\,L} = 2\,n\,L - 2\,[l] = 0$$

oder

$$L = \frac{2\,[l]}{2\,n} = \frac{[l]}{n},$$

woraus

$$[v] = n \cdot \frac{[l]}{n} - [l] = 0$$

in Übereinstimmung mit Gleichungen (2) und (1).

Die Gleichung (4) bildet die grundlegende Bedingung für die gesamte Ausgleichungsrech-

nung. Nach ihr erhielt letztere die Bezeichnung „Methode der kleinsten Quadrate“ (besser: Methode der kleinsten Quadratsumme). Sie läßt, wie Gleichung (1), eine bemerkenswerte mechanische Deutung zu. Denkt man sich nämlich die Beobachtungswerte l (wie in Fig. 1) als Ordinaten aufgetragen, so stellen deren Abweichungen v vom Mittelwert L die Ordinaten ihrer Endpunkte vor in bezug auf die durch den Endpunkt dieses Mittelwertes parallel zur Abszisse gezogene Achse. Betrachtet man diese Ordinatenendpunkte als Massenpunkte, denen vermöge der gleichen Beobachtungsgenauigkeit je dasselbe Gewicht 1 zukommt, und denkt sich die Gewichte in ihnen angreifend und parallel zur Achse wirkend, so bedeutet $[v]$ die Summe der statischen Momente für Drehung um den Endpunkt des Mittelwertes L, und (1) $[v] = 0$ das vorhandene Gleichgewicht. $[v\,v]$ stellt das axiale Trägheitsmoment für die durch den genannten Endpunkt gehende Achse vor, und (4) $[v\,v] = \text{Min.}$ bedeutet wie (1) $[v] = 0$, daß dieser Endpunkt des Mittelwertes L den Schwerpunkt des Systems gleich gewichtiger Massenpunkte vorstellt; ganz in Übereinstimmung mit unserem praktischen Gefühl.

Zum Schluß möge noch untersucht werden, welche Werte die Summen der Quadrate der Abschlußdifferenzen in beiden Beobachtungsreihen (s. S. 18) annehmen.

Die erste Reihe liefert:

$$16 + 25 + 36 + 25 + 25 + 25 + 25 + 36 + 25 + 16 = 254\,.$$

Die zweite Reihe liefert:

$$1 + 1 + 1 + 100 + 144 + 0 + 1 + 0 + 225 + 81 = 554\,.$$

Es ist also, wie vorauszusehen war, die Summe der Fehlerquadrate in der zweiten Reihe größer, die Beobachtungsgenauigkeit geringer als in der ersten.

Einteilung der Ausgleichungsaufgaben.

In den §§ 2 und 3 sind zwei Aufgabenfälle angedeutet worden, deren erster durch die Bedingung, daß die Summe der an den einzelnen Messungsresultaten anzubringenden Verbesserungen gleich 0 sein soll, ($[v] = 0$), eindeutig gelöst werden konnte, während dieser Bedingung im zweiten Falle eine unendlich große Zahl von Lösungen entsprach. Dies zeigt, daß beide Fälle prinzipielle Verschiedenheiten aufweisen müssen. In der Tat hat es sich im ersten um die Auswahl eines bestmöglichen Wertes für die direkt und mehrfach beobachtete Größe L gehandelt, während im zweiten Falle andere, zu ihr in Beziehung stehende Größen beobachtet wurden, durch deren Vermittlung die gesuchte Multiplikationskonstante x erschlossen werden mußte.

Im ersten Falle handelte es sich um die Ausgleichung direkter Beobachtungen, im zweiten um die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Es ist auch möglich, daß zwar die mehrfach beobachteten Größen selbst gesucht, daß sie aber unter sich nicht unabhängig sind, sondern streng zu erfüllenden Bedingungen unterliegen (Winkel im Dreieck usw.). In diesem Falle spricht man von der Ausgleichung bedingter direkter Beobachtungen. Endlich können die direkt beobachteten Größen zur Bestimmung anderer Größen dienen, die aber ihrerseits gewisse Bedingungen erfüllen müssen (z. B. Einschaltung eines durch Winkelbeobachtung bestimmten Dreiecknetzes in ein als fehlerfrei anzunehmendes Netz höherer Ordnung): man hat den Fall der Ausgleichung bedingter, vermittelnder Beobachtungen. Für jeden dieser Aufgabenfälle wird ein *besonderer Gang* der Lösung aufzustellen sein, der ge-

rade für ihn zweckmäßig ist. Doch ist diese Unterscheidung keineswegs so scharf, daß sich nicht auf spezielle Aufgaben sowohl die eine als die andere Lösung anwenden ließe.

Die Ausgleichung selbst kann auf rein rechnerischem Wege durchgeführt, oder durch graphische Darstellung unterstützt werden. Das erstere Verfahren hat den Vorzug größerer Genauigkeit, das letztere denjenigen größerer Übersichtlichkeit und des Erkennenlassens etwaiger bei der Beobachtung unterlaufener grober Fehler vor Abschluß der Ausgleichung.

I. Abschnitt.

Ausgleichung direkter Beobachtungen.

---

1. Kapitel.

Direkte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

§ 4. Untersuchung der einer Einzelbeobachtung innewohnenden Genauigkeit.

Die wichtigste Aufgabe der Ausgleichungsrechnung: Feststellung des wahrscheinlichsten Wertes der Beobachtungsgröße, haben wir für den Fall gleich genauer, direkter Beobachtungen gelöst. Von Interesse, namentlich im Hinblick auf die Auswahl möglichst zweckmäßiger Beobachtungsmethoden ist nun noch ein Einblick in die bei der Einzelbeobachtung erreichte Genauigkeit. Wir haben zu diesem Zwecke schon auf S. 17 die durchschnittliche Abweichung d der Beobachtungen vom wahren Sollwert der beobachteten Größe berechnet. Wir haben *aber dabei erkannt*, daß dieser Durchschnittsbetrag d einen

Maßstab für die erreichte Genauigkeit der Einzelmessung nicht abzugeben vermag, weil Beobachtungsreihen von ganz verschiedener Zuverlässigkeit identische Werte für d ergaben.

Um die größeren Abweichungsbeträge v stärker in die Wagschale zu werfen, haben wir statt ihrer selbst eine Potenz von ihnen verglichen und hierfür die zweite Potenz gewählt. Wir haben schließlich für die richtige Auswahl des wahrscheinlichsten Wertes der Beobachtungsgröße die Bedingung festgesetzt: $[v\,v] = \text{Min.}$ Diese zum Minimum zu machende Quadratsumme der Abweichungen v kann nämlich aus dreierlei Ursachen heraus einen großen Betrag erreichen: 1. durch unzweckmäßige Auswahl des Endwertes L aus den Beobachtungswerten l, 2. durch fehlerhafte Beobachtungen l und 3. durch große Anzahl n der Beobachtungen l, also der Abweichungen v. Wurde L nach Gleichung (2) gewählt, so ist $[v\,v] = \text{Min.}$, also ein kleinerer Wert $[v\,v]$ durch andere Auswahl von L nicht zu erreichen. Dann ist der Wert von $[v\,v]$ lediglich noch abhängig von der Beobachtungsgenauigkeit und von der Zahl n der Beobachtungen. Da die Genauigkeit jeder Einzelbeobachtung von deren Zahl unabhängig ist, so ist zu ihrer Erkenntnis die Quadratsumme $[v\,v]$ durch Division mit der Wiederholungszahl n auf das Quadrat des Fehlers einer Beobachtung zurückzuführen, und man erhält unter der Voraussetzung, daß die Abweichungen v_w wahre Beobachtungsfehler vorstellen, als Maßstab für die im Mittel bei einer Beobachtung erreichte Genauigkeit:

$$(5\text{a})\quad \begin{cases} m^2 = \dfrac{[v_w\,v_w]}{n} \\[2ex] m = \pm\sqrt{\dfrac{[v_w\,v_w]}{n}} = \left\{\begin{array}{c}\text{mittlerer Fehler einer}\\ \text{Beobachtung.}\end{array}\right. \end{cases}$$

Die Voraussetzung, daß wir es mit w a h r e n Beobachtungsfehlern zu tun haben, trifft in denjenigen Fällen zu, in denen der Sollwert der Beobachtungsgröße zum voraus bekannt ist (Winkelsumme im Dreieck oder im Vieleck; Summe der Projektionen der Seiten eines geschlossenen Polygons auf eine beliebige Achse; Summe der Höhenunterschiede einer Nivellementsschleife, bei welcher an identischem Punkt an- und abgeschlossen wurde usw.).

So liefert das hierhergehörige Beispiel S. 18 und 21 als mittleren Fehler einer Beobachtung der ersten Reihe

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{254}{10}} = \pm 5{,}04 \text{ mm},$$

als mittleren Fehler einer Beobachtung der zweiten Reihe

$$m_2 = \pm\sqrt{\frac{554}{10}} = \pm 7{,}45 \text{ mm}.$$

Der Vergleich mit dem durchschnittlichen Fehler $d = 5$ mm (s. S. 18) zeigt nebenbei, daß der m i t t l e r e Fehler nicht bloß ein gerechterer, sondern auch ein strengerer Richter ist, als der d u r c h s c h n i t t l i c h e Fehler.

Ist der Wert der Beobachtungsgröße nicht zum voraus bekannt, muß er vielmehr erst aus einer endlichen Zahl von Beobachtungen nach Gleichung (2) erschlossen werden, so ist er selbst nicht fehlerfrei, also sind es auch nicht die aus ihm abgeleiteten Verbesserungsbeträge v der Beobachtungswerte l.

Möge der nach Gleichung (2) berechnete Mittelwert L um den nach Vorzeichen und Größe unbekannten Betrag $\pm M$ unrichtig sein, so daß sein wahrer (aber unzugänglicher) Wert $= L + M$ ist, möge ferner die unzugängliche, w a h r e Abweichung jedes einzelnen Beobachtungswertes l von ihm mit v_w, die uns zugängliche Abweichung vom Mittelwert L mit v bezeichnet werden, so ist

$$
\begin{aligned}
v_{w_1} &= (L+M) - l_1 = L - l_1 + M = v_1 + M \\
v_{w_2} &= (L+M) - l_2 = L - l_2 + M = v_2 + M \\
&\vdots \\
v_{w_n} &= (L+M) - l_n = L - l_n + M = v_n + M \\
\hline
[v_w v_w] &= [vv] + nM^2 + 2M[v]
\end{aligned}
$$

und, da nach Gleichung (1) $[v] = 0$,

$$[v_w \cdot v_w] = [v\,v] + n\,M^2. \tag{6}$$

Jedes der drei Glieder ist als Summe quadratischer Einzelsummanden positiv, folglich $[v_w\,v_w] > [v\,v]$.

Hieraus geht hervor: Treten an Stelle der wahren Abweichungen v_w in Gleichung (5a) die wahrscheinlichen Abweichungen v, so wird dadurch der Zähler $[v\,v]$ kleiner, also muß dies beim Nenner n im gleichen Verhältnis der Fall sein. Die Bestimmung des Reduktionsverhältnisses ist aber einwandfrei jetzt noch nicht möglich, weil wir den Fehler M des Mittelwertes L der Beobachtungsgröße [s. Gleichung (6)] noch nicht berechnen können. Immerhin können wir jetzt schon erkennen, daß der an Stelle von n in (5a) tretende Nenner so beschaffen sein muß, daß er: 1. im Falle mangelnder Überbestimmung, d. h. wenn nur eine Beobachtung l vorhanden ist, für die dabei erreichte Genauigkeit einen unbestimmten Wert liefert, weil diese hieraus überhaupt nicht erschlossen werden kann; 2. im Falle vorhandener Überbestimmung gegen die Wiederholungszahl n konvergiert, wie der Ausdruck $[v\,v]$ gegen $[v_w\,v_w]$. Beides trifft zu für den Nenner $n-1$.

Denn im Falle einer einzigen Beobachtung wird die Abweichung v ihres Resultates vom Mittelwert L, gleich 0, ebenso der Nenner $n-1=0$, folglich

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-1} = \frac{0}{0} = \text{unbestimmt.}$$

Im Falle einer sehr großen Zahl n von Beobachtungen nähert sich L dem wahren Wert, v der wahren Abweichung v_w, $n-1$ der Wiederholungszahl n, folglich

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-1} \sim \frac{[v_w\,v_w]}{n}\,.$$

Wir setzen daher vorbehältlich später zu erbringenden Beweises (s. S. 35) unter Ersetzung der wahren, unzugänglichen Abweichung v_w durch die zugängliche Abweichung v einer Beobachtung l vom wahrscheinlichen Wert L

$$(5\text{b})\quad \begin{cases} m^2 = \dfrac{[v\,v]}{n-1} \\[2ex] m = \pm\sqrt{\dfrac{[v\,v]}{n-1}} = \left\{\begin{array}{c}\text{mittlerer Fehler einer}\\ \text{Beobachtung.}\end{array}\right. \end{cases}$$

Satz. Das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Abweichungen je vom Mittelwert, dividiert durch die Zahl der überschüssigen Beobachtungen.

Aus den Fehlergleichungen S. 14 und 20

$$v = L - l \quad \text{oder} \quad L = l + v$$

erkennen wir, daß die Abweichungen v Größen gleicher Art und Gattung vorstellen, wie die Beobachtungsgrößen l, sie bedeuten Verbesserungszuschläge zu den Beobachtungswerten l, welche nötig sind, um diese in den Mittelwert L überzuführen. Als benannte Größen lassen sie sich aber weder quadrieren noch differenzieren, wie dies S. 20, 25 und 26 geschah!

Den hierin liegenden Widerspruch überwinden wir, indem wir jedes v mittels Division durch seine eigene *Maßeinheit* auf eine unbenannte Zahl zurückführen, ohne

dabei an der absoluten Zahlengröße etwas zu ändern. Zum Schlusse führen wir dann für den mittleren Fehler m die der Verbesserung v geraubte Benennung wieder ein.

§ 5. Praktische Ausrechnung des Mittelwertes L und der Summe der Fehlerquadrate $[v\,v]$ aus den Beobachtungswerten l.

Sind die Beobachtungswerte l durch große Zahlen, oder gar durch Benennungen ausgedrückt, deren Beziehung nicht dezimal ist (z. B. Winkel in alter, sexagesimaler Teilung), so wird die Ausrechnung des Mittelwertes L nach Formel (2) $L = \frac{[l]}{n}$ sehr schwerfällig. Führen wir dagegen einen dem Mittelwert L sich möglichst anschmiegenden Näherungswert N ein und bezeichnen die an diesem anzubringenden kleinen Zuschläge mit ν, so daß

$$\begin{aligned} \text{Beobachtungswert}\quad l_1 &= N + \nu_1 \\ l_2 &= N + \nu_2 \\ &\vdots \\ l_n &= N + \nu_n \\ \hline [l] &= n \cdot N + [\nu]\,, \end{aligned}$$

so wird

$$L = \frac{[l]}{n} = N + \frac{[\nu]}{n}\,. \tag{7}$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers m einer Beobachtung brauchen wir nach Gleichung (5b) die Summe $[v\,v]$ der Fehlerquadrate, welche wir durch Quadrierung der Verbesserungszuschläge $v = L - l$ [s. Gleichung (1)] erhalten. Um die Fehlerquadratsumme direkt zu finden, setzen wir

$$\begin{aligned}
v_1 &= L - l_1\,; & v_1^2 &= L^2 - 2\,L\,l_1 + l_1^2 \\
&\vdots & &\vdots \\
v_n &= L - l_n\,; & v_n^2 &= L^2 - 2\,L\,l_n + l_n^2 \\
\hline
& & [v\,v] &= n\,L^2 - 2\,L\,[l] + [l\,l]
\end{aligned}$$

und durch Einsetzung von

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{[l]}{n} \\ L^2 &= \frac{[l]^2}{n^2} \end{aligned}\right\}\ [v\,v] = -\frac{[l]^2}{n} + [l\,l]\,.$$

Diese Gleichung ist praktisch nicht verwertbar. Dagegen können wir sie verbinden mit der zur Ableitung von (7) verwendeten Gleichung $\nu = l - N$. Aus dieser kommt

$$\begin{aligned}
\nu_1^2 &= l_1^2 - 2\,l_1\,N + N^2 \\
&\vdots \\
\nu_n^2 &= l_n^2 - 2\,l_n\,N + N^2 \\
\hline
[\nu\,\nu] &= [l\,l] - 2\,N\,[l] + n \cdot N^2\,.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzung von $[l\,l] = [v\,v] + \frac{[l]^2}{n}$

und $L = \frac{[l]}{n}$

kommt

$$[\nu\,\nu] = [v\,v] + n\,L^2 - 2\,N \cdot n\,L + n\,N^2 = [v\,v] + n(L - N)^2$$

oder

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} [vv] &= [\nu\nu] - n(L-N)^2 \quad \text{und unter Beachtung von (7)} \\ &= [\nu\nu] - \frac{[\nu]^2}{n}\,. \end{aligned}\right.$$

Damit läßt sich der mittlere Fehler einer Beobachtung ohne vorgängige Ausrechnung der einzelnen Beobachtungsfehler v, ja sogar ohne Berechnung des Mittel-

wertes L der Beobachtungsgröße gewinnen. Gleichung (8) zeigt in Übereinstimmung mit (4), daß für $L \gtrless N$ unter allen Umständen $[\nu\nu] > [vv]$.

§ 6. Mittlerer Fehler M des Mittelwertes L aus n gleich genauen Beobachtungen l.

Wir haben schon S. 26 das Bedürfnis empfunden, einen Einblick in die Genauigkeit des Mittelwertes (2) $L = \frac{[l]}{n}$ zu erlangen. Auch praktisch ist es oft wichtiger, die Genauigkeit des schließlichen Endwertes L, als diejenige der einzelnen Beobachtungswerte l zu kennen. Um hierüber Klarheit zu erhalten, ziehen wir in (2) den Summenzähler $[l]$ auseinander und schreiben

$$L = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \cdots + \frac{l_n}{n}.$$

Wir erkennen dann, daß von jedem Beobachtungswert l der n-te Teil in den schließlichen Mittelwert L übergeht, der sich derart aus n Teilen zusammensetzt. Unsere Aufgabe besteht daher jetzt darin, zu ergründen:

1. Welcher Teil des mittleren Fehlers m einer Beobachtung l der Größe L geht auf den Anteil $\frac{l}{n}$ über?
2. Wie pflanzen sich die Fehler der Einzelgrößen $\frac{l}{n}$ auf deren Summe fort?

Die Frage 1. fassen wir allgemeiner wie folgt: Wie groß ist der mittlere Fehler einer Bestimmung eines Vielfachen $a \cdot l$ der Beobachtungsgröße L, wenn der mittlere Fehler m einer Beobachtung l bekannt und a ein fehlerfreier Faktor ist? Wir werden in § 12 die Fortpflanzung von Beobachtungsfehlern auf beliebige Funktionen der Beobachtungsgrößen allgemein behandeln. Hier wollen

wir vorläufig durch Überlegung an einem speziellen Beispiele uns Klarheit verschaffen:

Das Gewicht $a \cdot L$ eines Wagens Kohle ist zu bestimmen aus der Anzahl a darauf geschütteter gefüllter Körbe und aus dem durch n-fache Wägung $l_1, l_2 \ldots$ gefundenen mittleren Nettogewicht L **einer** solchen Korbfüllung, wo

$$L = l_1 + v_1 = l_2 + v_2 + = \cdots = \frac{[l]}{n} \quad \text{und} \quad [v] = 0.$$

Würde man den ersten Beobachtungswert l_1 des Nettogewichtes jener Korbfüllung der Bestimmung des Gesamtgewichtes $a\,L$ zugrunde legen, so erhielte man gleichsam als d e s s e n ersten Beobachtungswert: $a \cdot l_1$,

würde man den zweiten Beobachtungswert l_2 seines Nettogewichtes der Bildung von aL zugrunde legen, so erhielte man als d e s s e n zweiten Beobachtungswert: $a \cdot l_2$,

würde man den n-ten Beobachtungswert l_n jenes Nettogewichtes der Bildung von aL zugrunde legen, so erhielte man als d e s s e n n-ten Beobachtungswert: $a \cdot l_n$.

Aus allen diesen n Bestimmungen des Gesamtgewichtes ergäbe sich als dessen endgültiger, bestmöglicher Mittelwert:

$$a\,L = \frac{a\,l_1 + a\,l_2 + \cdots + a\,l_n}{n} = a \cdot \frac{[l]}{n}.$$

Bezeichnet man die Abweichung einer derartigen Bestimmung $a \cdot l$ vom Mittelwert $a\,L$ mit V, so wird:

$$\begin{aligned}
V_1 &= a\,L - a\,l_1 = a(L - l_1) = a \cdot v_1 \\
V_2 &= a\,L - a\,l_2 = a(L - l_2) = a \cdot v_2 \\
&\vdots \\
V_n &= a\,L - a\,l_n = a(L - l_n) = a \cdot v_n \\
\hline
[V] &= [a \cdot v] = a\,[v] = 0 \quad \text{und} \quad [V\,V] = a^2 [v\,v].
\end{aligned}$$

Nach Gleichung (5 b) wird demnach der mittlere Fehler einer Bestimmung der Größe aL:

$$(9) \qquad m_{a \cdot L} = \pm \sqrt{\frac{[VV]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{a^2 [vv]}{n-1}} = a \cdot m_l .$$

Die Frage 2. fassen wir ebenfalls allgemeiner wie folgt: Wie groß ist der mittlere Fehler der Größe

$$L = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n ,$$

wenn die mittleren Fehler m_{L_1}, m_{L_2} ... der Summanden L_1, L_2 ... bekannt sind?

Die Art der Größenbestimmung selbst unterscheidet sich von der vorigen dadurch, daß dort der wahrscheinlichste Wert L eines, aber nur dieses einzigen Teiles der Beobachtungsgröße (durch beliebig oft wiederholte Beobachtung) ein für allemal gemessen wurde. Die gesuchte Größe wurde dann durch Multiplikation dieses Wertes mit einem (fehlerfreien) Faktor a gewonnen, während hier für jeden einzelnen der n Teile je in w-facher Wiederholung sowohl dessen Mittelwert L, als der mittlere Fehler m einer Beobachtung ermittelt wird. Angewandt auf das vorige Beispiel wird jetzt jeder einzelne Korb Kohlen, der auf den Wagen auf- oder von ihm abgeladen wurde, w-mal gewogen und hieraus gleichzeitig der mittlere Fehler einer Wägung jedes Korbes bestimmt.

Für das auf dem Wagen schließlich vorhandene Quantum Kohlen hat man daher ebenso viele (nämlich w) Wägungen, als für jeden der n auf- oder abgeladenen Körbe ausgeführt wurden. Bezeichnet man die Ordnungszahlen der $\left\{ \begin{array}{l} n \text{ Körbe mit Indices} \\ w \text{ Wägungen mit Akzenten} \end{array} \right\}$, so liefert für dieses Quantum die

1-te Wägung jedes Korbes das Gewicht $L' = l'_1 \pm \cdots \pm l'_n$
2-te " " " " " $L'' = l''_1 \pm \cdots \pm l''_n$
⋮
w-te " " " " " $L^{\underline{w}} = l^{\underline{w}}_1 \pm \cdots \pm l^{\underline{w}}_n$.

Daraus ergibt sich nach Gleichung (2) das wahrscheinlichste Gesamtgewicht zu

$$L = \frac{L' + L'' + \cdots + L^{\underline{w}}}{w} = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n ,$$

wenn L_1, L_2 ... je das Mittel aus den w verschiedenen Wägungsergebnisssen des 1-ten, 2-ten ... Korbes vorstellen.

Bezeichnet man die an den einzelnen Wägungen jedes Korbes anzubringenden Verbesserungen, welche nötig sind, um die w Wägungsresultate des gesamten Quantums einander gleich, d. h. $L' = L'' = \cdots = L^{\underline{w}} = L$ zu machen, unter Beibehaltung der Akzente und Indices mit v, so liefert als Gesamtgewicht des Wagens die

1-te Wägung jedes d. Körbe $L = (l'_1 + v'_1) \pm \cdots \pm (l'_n + v'_n)$
2-te " " " " $L = (l''_1 + v''_1) \pm \cdots \pm (l''_n + v''_n)$
⋮
w-te " " " " $L = (l^{\underline{w}}_1 + v^{\underline{w}}_1) \pm \cdots \pm (l^{\underline{w}}_n + v^{\underline{w}}_n)$.
←— n Körbe —→

Hieraus ergibt sich als Verbesserungszuschlag für die 1-te, 2-te ... w-te Wägung des Gesamtquantums aus der

1-ten Wägung jedes Korbes $L - L' = V' = v'_1 \pm \cdots \pm v'_n$
2-ten " " " $L - L'' = V'' = v''_1 \pm \cdots \pm v''_n$
⋮
w-ten " " " $L - L^{\underline{w}} = V^{\underline{w}} = v^{\underline{w}}_1 \pm \cdots \pm v^{\underline{w}}_n$.

Gleichzeitig haben wir aber nach Gleichung (1) für die Abweichungen v der w verschiedenen Wägungsergebnisse eines und desselben Korbes je vom Mittelwerte:

$$[\text{Wäg.-Verbesserungen d. 1. Korbes}] = v_1' + \cdots + v_1^w = [v_1] = 0$$

$$\text{„ „ „ 2. „ } = v_2' + \cdots + v_2^w = [v_2] = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

woraus

$$[V] = [v_1] + [v_2] + \cdots + [v_n] = 0 \,,$$

analog Gleichung (1).

Nach Gleichung (5 b) haben wir endlich als Quadrat des mittleren Fehlers einer Wägung

$$\text{des 1-ten Korbes } m_{L_1}^2 = \frac{v_1'^2 + v_1''^2 + \cdots + v_1^{w^2}}{w-1} = \frac{[v_1^2]}{w-1}$$

$$\text{„ 2-ten „ } m_{L_2}^2 = \frac{v_2'^2 + v_2''^2 + \cdots + v_2^{w^2}}{w-1} = \frac{[v_2^2]}{w-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

und analog als mittleren Fehler einer Wägung des ganzen Wagens

$$m_{L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n} = \pm \sqrt{\frac{[VV]}{w-1}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{[v_1^2] + [v_2^2] + \cdots + [v_n^2] \pm 2\, v_1' v_2' \pm \cdots \pm 2\, v_{n-1}^w v_n^w}{w-1}} \,.$$

Entsprechend der Eigenschaft der v als zufälliger Fehler und der Gleichung $[V] = [v_1] + \cdots = 0$ sind die einzelnen Summanden von der Form $2\, v_r v_{r+1}$ im Zähler des Radikanten im Gegensatz zu den quadratischen Summanden gleich wahrscheinlich positiv, wie negativ. Ihre algebraische Summe tritt also gegenüber derjenigen der quadratischen Summanden um so mehr zurück, als

sie überdies als Produkte ungleicher Faktoren durchschnittlich kleiner sind, als letztere.

Trotzdem die Zahl dieser doppelten Produkte $= w\binom{n}{2}$, also $(n-1)$-mal größer ist, als die Zahl $w \cdot n$ der quadratischen Summanden, läßt sich demnach ihre Summe gegenüber derjenigen der letzteren vernachlässigen, so daß wir erhalten:

$$
(10)\left\{\begin{aligned}
m_{L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n} &\sim \pm\sqrt{\frac{[v_1^2] + [v_2^2] + \cdots + [v_n^2]}{w-1}} \\
&\sim \pm\sqrt{\frac{[v_1^2]}{w-1} + \frac{[v_2^2]}{w-1} + \cdots + \frac{[v_n^2]}{w-1}} \\
&\sim \pm\sqrt{m_{L_1}^2 + m_{L_2}^2 + \cdots + m_{L_n}^2}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Nun kehren wir zur eigentlichen Aufgabe des § 6 zurück. Gleichung (9) zeigt, daß, wenn einer Bestimmung der Größe L der mittlere Fehler m zukommt, auf die durch Multiplikation erlangte a-fache Größe auch der a-fache Fehler, auf die $\frac{1}{n}$-fache Größe also der Fehler $\frac{m}{n}$ übergeht. Demgemäß kommt jedem der Teile $\frac{l_1}{n}, \frac{l_2}{n}, \ldots \frac{l_n}{n}$, aus denen sich (s. S. 30) der Mittelwert L gerade so zusammensetzt, als ob jeder von ihnen nur einmal beobachtet worden wäre, der mittlere Fehler $\frac{m}{n}$ zu, und der Summe der Teile, d. h. dem Resultat L aus n gleich genauen Beobachtungen l je vom mittleren Fehler m nach Gleichung (10) der mittlere Fehler:

$$
(11) \quad M_L = \pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{m}{n}\right)^2}_{1} + \underbrace{\left(\frac{m}{n}\right)^2}_{2} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{m}{n}\right)^2}_{n}} = \pm\frac{m}{\sqrt{n}}.
$$

Die Gleichung (11) kann man sich durch folgende Überlegung plausibel machen. Die Genauigkeit des Resultates aus einer Reihe gleich genauer Beobachtungen kann nur abhängen von der Genauigkeit der Einzelbeobachtungen und von ihrer zur Mittelbildung verwendeten Anzahl. Kann man — etwa durch Wahl einer besseren Beobachtungsmethode — den Fehler jeder Einzelbeobachtung l reduzieren, so wird im gleichen Verhältnis auch der Fehler des Mittelwertes L abnehmen. Ebenso läßt sich der letztere aber auch verringern durch Steigerung der Wiederholungszahl n. Nur wird die Wirkung dieser Genauigkeitssteigerung unmöglich proportional zur Wiederholungszahl sein können, weil der wahre Wert der Beobachtungsgröße, d. h. der Fehler 0 für den Mittelwert erst durch ∞ viele Beobachtungswiederholungen erzielt werden könnte (s. S. 15). Denkt man sich die Zahl der Wiederholungen als Abszissen, die zugehörigen, im Mittelwert L noch zurückbleibenden Fehler als Ordinaten aufgetragen und die so erhaltenen Punkte durch eine stetige Linie verbunden, so muß demnach diese Linie sich der Abszissenachse asymptotisch nähern. Dies trifft zu für die Beziehung $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$

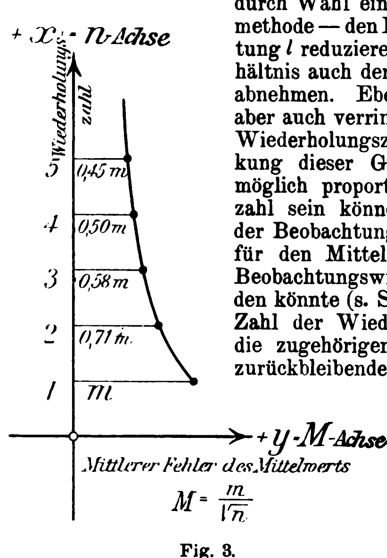


Fig. 3.

(s. Fig. 3). Die langsame Abnahme von M im Falle auch erheblicher Steigerung der Wiederholungszahl über 2 oder 3 hinaus zeigt, daß es i. A. viel wirtschaftlicher ist, etwa wünschenswerte Genauigkeitssteigerung durch Verbesserung der Beobachtungsmethoden und -Instrumente, als durch Steigerung der Wiederholungszahl herbeizuführen.

Setzen wir den gefundenen Ausdruck für den mittleren Fehler M des Mittelwertes L in Gleichung (6) S. 26 ein, so erhalten wir

$$[v_w v_w] = [v v] + m^2$$

und durch Benutzung von Gleichung (5a)

$$n \cdot m^2 = [v_w v_w] = [v v] + m^2 ,$$

woraus

$$m^2 = \frac{[v v]}{n-1} , \qquad m = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n-1}}$$

in Übereinstimmung mit der S. 27 durch direkte Überlegung gewonnenen Gleichung (5b).

§ 7. Größter Betrag des unvermeidlichen Beobachtungsfehlers.

Für viele praktische Aufgaben ist die Kenntnis des mittleren Fehlers von geringerer Bedeutung, als diejenige des äußerstenfalls zu befürchtenden Maximalfehlers.

Soll z. B. eine bauliche Anlage (Brücke usw.) auf Grund vorgängiger Messung konstruiert und zum Versetzen fertig hergerichtet werden, so darf der Fehler der Maßangabe ohne erhebliche Unzuträglichkeiten einen gewissen Maximalbetrag nicht überschreiten. Ebenso werden amtliche Genauigkeitsvorschriften da, wo solche im öffentlichen Verkehr nötig werden, die äußerstenfalls noch zulässige Abweichung des durch Messung oder Wägung usw. ermittelten Maßes eines Gegenstandes vom richtigen Betrag feststellen müssen. —

In Übereinstimmung mit dem Bisherigen nehmen wir an, daß grobe Fehler durch entsprechende Sicherungsmaßregeln erkannt und aus den Beobachtungsresultaten ausgemerzt sind, ehe die Weiterverarbeitung der letzteren beginnt. Diese enthalten also nur noch die aus mehr oder weniger Fehlerelementen sich zusammensetzenden unvermeidlichen Fehler. Die Fehlerelemente sind uns nun weder nach Ursache, noch nach Größe und Vorzeichen im einzelnen sicher bekannt. Wir wissen von ihnen nur, daß sie gleich wahrscheinlich positiv, wie negativ; bald größer, bald kleiner sind, sich das eine Mal häufen, das andere Mal

ganz oder teilweise aufheben können. Der mittlere Fehler einer Beobachtung ist ihre im Mittel, d. h. unter Ausschluß der besonders günstigen und der besonders ungünstigen Fälle am Schlußresultat in die Erscheinung tretende Summe. Aber auch im ungünstigsten Falle, in welchem die einzelnen Fehlerelemente ihren Maximalbetrag und dazu noch gleiches Vorzeichen erlangen, wird ihre Summe, d. h. die Abweichung irgend eines Beobachtungs- vom wahren oder vom Mittelwert ein gewisses Maß nicht überschreiten, das abhängig ist einerseits von der möglichen Größe der Fehlerelemente, d. h. der Beobachtungsgenauigkeit bzw. dem mittleren Beobachtungsfehler*), und andererseits von der Zahl der Beobachtungswiederholungen. Dieses Maß ist der Maximalfehler einer Beobachtung. Ihn bei irgend einer der Beobachtungen einmal zu erreichen ist um so mehr Wahrscheinlichkeit vorhanden, je öfter die Beobachtung wiederholt wird.

Durch nähere Untersuchung auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man, daß durch Häufung der unvermeidlichen Fehlerelemente der:

1	fache	mittl.	Fehler	m	unter	3	Beob.	wahrscheinl.	1 mal
2	"	"	"	$2m$	"	22	"	"	1 "
3	"	"	"	$3m$	"	368	"	"	1 "
4	"	"	"	$4m$	"	15800	"	"	1 "
5	"	"	"	$5m$	"	1750000	"	"	1 "

überschritten wird. (Vgl. hierüber Koll, Methode d. kl. Quadr.; Jordan, Ausgleichungsrechnung u. a. a. O.)**)

*) Die mehrfache Messung z. B. einer Streckenlänge wird erheblich größere unvermeidliche Abweichungen gegenüber dem Mittelwert ergeben, wenn sie mittels optischer Distanzmessung, oder Abschreitens, oder gar Schätzens, als wenn sie normalerweise mit Meßgeräten erfolgte.

**) *Läßt man von einer und derselben Stelle einer schiefen Ebene aus auf ihr* nach Größe und Gewicht gleiche Kugeln,

Benützt man also, wie man zumeist genötigt ist, die Größe der auftretenden Beobachtungsdifferenz zur Entscheidung darüber, ob man es im einzelnen Falle mit einem groben (durch Nachbeobachtung auszumerzenden), oder mit einem unvermeidlichen (einteilbaren) Fehler zu tun hat, so läuft man Gefahr, ohne daß tatsächlich ein grober Fehler vorläge, der zur Nachbeobachtung zwingt:

unter je	3 Beob.	1	wiederholen zu müssen,	wenn man	$1\,m$
„ „	22 „	1	„ „ „	„ „	$2\,m$
„ „	368 „	1	„ „ „	„ „	$3\,m$

als äußerste Abweichung einer Beobachtung vom Mittelwert noch zuläßt.

Die Annahme des dreifachen mittleren, als äußerstenfalls zu tolerierenden Maximalfehlers einer Beobachtung:

$$F_{\text{Max}} = 3\,m \tag{12}$$

ist in der Vermessungspraxis allgemein.

Sie zwingt im Laufe eines Jahres zur unverschuldeten Aufwendung einer Tagesarbeit für Nachmessungen, weil grobe Fehler da vermutet wurden, wo der durch unglückliche Häufung der Fehlerelemente entstandene unvermeidliche den dreifachen mittleren Fehler zufälligerweise überschritt, läßt aber andererseits auch tatsächlich grobe Fehler bis zum Betrage $3\,m$ durchschlüpfen!

---

eine nach der anderen, abrollen, und bringt man, beliebig verteilt, Hindernisse (etwa in Form eingeschlagener Stiftchen) an, welche die abrollenden Körper vorübergehend ebenso vom richtigen Wege (der Linie des stärksten Gefälles) ablenken, wie die während der Beobachtung auftretenden Fehlerelemente das Messungsergebnis vom Ziele der Messung, dem wahren Werte der Beobachtungsgröße, so werden die Kugeln den Fuß der Ebene in verschiedenen Punkten erreichen. Größere Abweichungen vom mittleren Ort des Auftreffens werden aber, entsprechend den vorstehenden Zahlen, viel seltener sein als kleine. Eine gewisse, nur bei sehr vielen Kugeln einmal erreichte *Maximalabweichung* wird keine der Kugeln überschreiten.

2. Kapitel.

Direkte Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

§ 8. Wahrscheinlichster Wert einer Beobachtungsgröße aus einer Reihe verschieden genauer Beobachtungen. Gewicht der Beobachtung. Gewichtseinheit.

Wir haben in Gleichung (2) das einfache arithmetische Mittel als den wahrscheinlichsten Wert einer Beobachtungsgröße festgestellt: $L = \frac{[l]}{n}$, unter der Voraussetzung, daß den Beobachtungswerten l gleiche Genauigkeit innewohnt. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, d. h. ist ein Beobachtungswert einer schärferen Beobachtung entsprungen, als der andere, so wäre es eine unbillige Zurücksetzung des genaueren ersteren, wollte man dem letzteren wahllos denselben Einfluß auf die Gestaltung des endgültigen Resultates einräumen, wie ihm. Niemanden würde es z. B. einfallen, als wahrscheinlichsten Wert L für eine Streckenlänge das einfache arithmetische Mittel zweier Beobachtungswerte l einzuführen, deren einer mittels genauer Meßgeräte und -Methoden, der andere durch bloßes Abschreiten erlangt wurde! Dagegen verursacht die Frage, auf welche Weise der verschiedenen Zuverlässigkeit der Einzelbeobachtungen bei der Bildung des gemeinsamen Endresultates Rechnung getragen werden soll, zunächst noch Schwierigkeiten*).

*) Diese Schwierigkeiten können dazu zwingen, vorübergehend, d. h. bis zu ihrer Überwindung, entweder auf die differentielle Behandlung verschieden genauer Beobachtungen, *oder auf die Mitb*enützung weniger zuverlässiger Beobach-

Der Unterschied in der Genauigkeit der beobachteten Einzelwerte kann verschiedenerlei Ursachen entspringen. Hat z. B. die mehrfache Beobachtung einer Größe L

n_1-mal den Wert l_1
n_2-mal „ „ l_2
n_n-mal „ „ l_n

ergeben, so ist ohne weiteres klar, daß nicht etwa

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} \ (?),$$

sondern nach Gleichung (2) zu setzen ist:

$$\text{(13a)} \begin{cases} L = \dfrac{\overbrace{l_1 + \cdots + l_1}^{n_1} + \overbrace{l_2 + \cdots + l_2}^{n_2} + \cdots + \overbrace{l_n + \cdots + l_n}^{n_n}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_n} \\ \quad = \dfrac{n_1 l_1 + n_2 l_2 + \cdots + n_n l_n}{n_1 + n_2 + \cdots + n_n} = \dfrac{[n\,l]}{[l]}\,. \end{cases}$$

Den fehlerfreien Zahlenwert n, welcher im vorliegenden Falle angibt, wie oft ein und derselbe Wert l bei mehrfacher Beobachtung einer gewissen Größe aufgetreten ist, nennt man das ihm zukommende „Gewicht".

Es ist nun aber auch denkbar, daß die Werte l_1 bzw. $l_2 \ldots$ nicht eigentliche Beobachtungswerte darstellen, sondern selbst wieder entstanden sind als Mittel aus n_1 bzw. $n_2 \ldots$, Beobachtungen von durchweg gleicher Genauigkeit, die man aus irgendwelchen Gründen (z. B. infolge zeitlicher Beobachtungsunterbrechung) gruppenweise zusammengefaßt hat.

---

tungen bei der Bildung des Endergebnisses überhaupt zu verzichten. Dies geschieht z. B. in bezug auf eine vielumstrittene, häufig mehr nach politischen, als sachlichen Erwägungen beurteilte Frage: die des politischen Wahlrechtes (allgemeines, gleiches Wahlrecht, Ausschluß als inferior gehaltener Personen vom Wahlrecht).

Bezeichnen wir sie zur Unterscheidung gegen vorhin diesmal mit l', l''... und die zu ihrer Gewinnung verwendeten Urbeobachtungen mit

$$l'_1 l'_2 \ldots l'_{n_1}; \quad l''_1 l''_2 \ldots l''_{n_2}; \quad l^n_1 l^n_2 \ldots l^n_{n_n},$$

so daß nach Gleichung (2) gewonnen wurde

$$l' = \frac{[l']}{n_1}, \quad l'' = \frac{[l'']}{n_2} \ldots l^n = \frac{[l^n]}{n_n},$$

so könnten wir zur Bildung des Endwertes L die ursprünglichen Beobachtungswerte benützen, d. h. die bereits gemittelten Werte l' wieder auseinanderziehen. Gleichung (2) würde dann liefern:

$$L = \frac{l'_1 + l'_2 + \cdots + l'_{n_1} + l''_1 + \cdots + l''_{n_2} + \cdots + l^n_1 + \cdots + l^n_{n_n}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}$$

$$= \frac{[l'] + [l''] + \cdots + [l^n]}{n_1 + n_2 + \cdots + n_n}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (2) auch $n_1 \cdot l' = [l']$ usf., so daß der obige Bruch übergeht in

$$(13\text{b}) \quad L = \frac{n_1 l' + n_2 l'' + \cdots + n_n l^n}{n_1 + n_2 + \cdots n_n} = \frac{[n\, l']}{[n]},$$

wo l' die aus den Urbeobachtungen gewonnenen Zwischenmittel und n die dazu jeweils verwendete Anzahl der ersteren vorstellen.

Die Gleichung (13b) entspricht vollkommen der Gleichung (13a) und zeigt, daß das jedem Einzelwert zukommende Gewicht n auch gedeutet werden kann als Anzahl der zu seiner Bildung verwendeten gleich genauen Urbeobachtungen.

Der Wert L des endgültigen Mittels der Beobachtungsgröße bleibt ferner unverändert, wenn man jedes

der Gewichte n mit einer konstanten Zahl ϱ multipliziert, denn man hat:

$$L = \frac{n_1 l' + n_2 l'' \ldots}{n_1 + n_2 + \cdots} = \frac{\varrho n_1 l' + \varrho n_2 l'' + \cdots + \varrho n_n l^n}{\varrho n_1 + \varrho n_2 + \cdots + \varrho n_n}$$

oder durch Einsetzung von $\varrho n = p$

$$(13c) \quad L = \frac{p_1 l' + p_2 l'' + \cdots + p_n l^n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[p l']}{[p]}\,.$$

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, die Beobachtungen seien ursprünglich von gleicher Genauigkeit und ihre in Gleichung (13a) bis (13c) einzuführenden Beträge l bzw. l' nur deshalb verschiedenwertig, weil sie als Extrakt aus einer verschieden großen Zahl von Urbeobachtungen gewonnen seien. Die Gewichte ergaben sich in diesem Falle gleich, oder proportional den Repetitionszahlen.

Entspringt die Verschiedenwertigkeit anderen Ursachen, z. B. der Verwendung verschieden genauer Instrumente oder Beobachtungsmethoden usw., so müssen die den einzelnen Beobachtungswerten l zukommenden Gewichte p erst erschlossen werden, etwa aus der ihnen innewohnenden Genauigkeit, d. h. ihrem irgendwie festgestellten mittleren Fehler m. Möge der mittlere Fehler m einer solchen Beobachtung l bekannt, derjenige einer — mit irgend einem Instrument, nach irgend einer Methode, oder vielleicht nur gedachten, überhaupt nicht ausgeführten — Normalbeobachtung $= \mu$ festgesetzt sein, so kann man jeden der Beobachtungswerte l sich gewonnen denken als Mittel aus einer Anzahl p solcher Normalbeobachtungen, durch deren Zusammenfassung statt des Einheitsfehlers μ, für das Zwischenresultat $l_1 \ldots$ der mittlere Fehler $m_1 \ldots$ erzielt wurde. Die hierfür nötige *Zahl p von Normalbeobachtungen* stellt vor: das

Gewicht einer solchen wirklichen Beobachtung und ergibt sich nach Gleichung (11) aus

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}$$

zu

(14a) $$p = \frac{\mu^2}{m^2}\,.$$

Die nach dem Vorstehenden eventuell nur gedachte (nicht wirklich ausgeführte) Normalbeobachtung heißt „Gewichtseinheit“, ihr mittlerer Fehler μ „mittlerer Fehler der Gewichtseinheit“. Damit geht die Gleichung (13b) bzw. (13c) über in

(13d) $$\left\{\begin{aligned} L &= \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{\frac{\mu^2}{m_1^2}l_1 + \frac{\mu^2}{m_2^2}l_2 + \cdots + \frac{\mu^2}{m_n^2}l_n}{\frac{\mu^2}{m_1^2} + \frac{\mu^2}{m_2^2} + \cdots + \frac{\mu^2}{m_n^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{m_1^2}l_1 + \frac{1}{m_2^2}l_2 + \cdots + \frac{1}{m_n^2}l_n}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \cdots + \frac{1}{m_n^2}} = \frac{\left[\frac{l}{m\,m}\right]}{\left[\frac{1}{m\,m}\right]}\,. \end{aligned}\right.$$

Das Verschwinden von μ aus der Gleichung (13d) sagt: Das Resultat L einer Beobachtungsreihe wird durch veränderte Annahme der Gewichtseinheit nicht geändert.

Sind endlich die Beobachtungen l nicht bloß mit verschieden großen mittleren Fehlern m behaftet, sondern die in (13d) einzuführenden Werte l selbst wieder je aus einer veränderlichen Zahl n solcher Beobachtungen gemittelt, so wächst ihr Gewicht entsprechend Gleichung (13a) proportional dieser Wiederholungszahl und es ist allgemein:

das Gewicht p des aus n-facher, je mit dem mittleren Fehler m behafteter Wiederholung erschlossenen Beobachtungswertes

$$p = \frac{n \cdot \mu^2}{m^2}, \tag{14}$$

der wahrscheinlichste Wert, das „allgemeine arithmetische Mittel“ aus einer Reihe verschieden genauer Beobachtungen

$$L = \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{\left[\frac{n\,\mu^2\,l}{m^2}\right]}{\left[\frac{n\,\mu^2}{m^2}\right]}. \tag{13}$$

Aus (14a) ergibt sich für das Verhältnis der Gewichte zweier, aus gleich oftmaliger Wiederholung ungleich genauer Beobachtung entsprungener Beobachtungswerte l_1 und l_2, denen bzw. die mittleren Fehler m_1 und m_2 zukommen:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\mu^2}{m_1^2} \\ p_2 &= \frac{\mu_2}{m_2^2} \end{aligned}\right\} p_1 : p_2 = m_2^2 : m_1^2$$

$$m_1 : m_2 = \sqrt{p_2} : \sqrt{p_1}, \tag{15}$$

d. h. die mittleren Fehler verhalten sich umgekehrt, wie ihre Gewichtswurzeln.

Die Gleichung (13) läßt eine schöne Deutung aus dem Gebiete der Mechanik zu: Denkt man sich die Beobachtungswerte l als Ordinaten zu einer beliebigen Abszisse aufgetragen und die Endpunkte je mit dem Gewicht p der zugehörigen Beobachtung behaftet, so bezeichnet das end-

gültige Mittel L die Ordinate des Schwerpunktes des so gewonnenen Systems von Massenpunkten, weil die Summe der statischen Momente ist $[p]L - [pl] = 0$.

§ 9. Eigenschaften des allgemeinen arithmetischen Mittels.

Wir haben in Gleichung (13) für den endgültigen Wert L aus einer Reihe verschieden genauer Beobachtungen l, denen die Gewichte p zukommen, ermittelt:

$$L = \frac{[pl]}{[p]}.$$

Rückwärts können wir jetzt die Verbesserungen (Zuschläge) v berechnen, welche an den einzelnen Beobachtungswerten l anzubringen sind, um sie zum Mittelwert zu ergänzen:

$$l_1 + v_1 = L\,, \quad \text{also} \quad v_1 = L - l_1$$

analog

$$v_2 = L - l_2\,.$$
$$\vdots$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} p_1 v_1 &= p_1 L - p_1 l_1 \\ &\vdots \\ p_n v_n &= p_n L - p_n l_n \end{aligned}$$

$$(16) \quad p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_n v_n \equiv \underline{[pv]} = L[p] - [pl]$$

wegen Gleichung (13) $\underline{= 0}$,

übereinstimmend mit Gleichung (1), wo $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ und $[v] = 0$ war. Gleichung (16) liefert eine wertvolle Rechenprobe für die richtige Bildung des Mittelwertes L. Sie zeigt aber auch eine schöne Analogie mit der Statik *(Kräftepolygon)*.

Wir haben schon im vorigen Paragraphen aus der Gleichung $[p]L - [pl] = 0$ erkannt, daß der endgültige Mittelwert L die Ordinate des Schwerpunktes vorstellt, eines Systems von Massenpunkten (nämlich der Endpunkte der Ordinaten l), wenn man jeden von ihnen mit dem der betreffenden Beobachtung l zugehörigen Gewichte p behaftet. Die Abstände der einzelnen Massenpunkte von der durch den Schwerpunkt gezogenen Parallelen zur x-Achse sind dann $L - l = v$ und es muß sein — als Eigenschaft des Schwerpunktes — das Trägheitsmoment in bezug auf diese Parallele

$$\equiv [p\,v\,v] = \text{Min.} \tag{17}$$

Zur Probe bilden wir

$$v_1^2 = L^2 - 2\,L\,l_1 + l_1^2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$v_n^2 = L^2 - 2\,L\,l_n + l_n^2\,,$$

also

$$p_1\,v_1\,v_1 = p_1\,L^2 - 2\,p_1\,L\,l_1 + p_1\,l_1^2$$
$$\vdots$$
$$p_n\,v_n\,v_n = p_n\,L^2 - 2\,p_n\,L\,l_n + p_n\,l_n^2$$
$$\overline{[p\,v\,v] = L^2\,[p] - 2\,L\,[p\,l] + [p\,l\,l]\,.}$$

Verlangen wir nun die Auswahl des endgültigen Wertes L so, daß

$$[p\,v\,v] = \text{Min.}\,,$$

so erhalten wir

$$\frac{d\,[p\,v\,v]}{d\,L} = 2\,L\,[p] - 2\,[p\,l] = 0$$

$$L = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (13) und mit Gleichung (4), wenn man beachtet, daß die Gewichte p der einzelnen Beobachtungswerte dort $= 1$ waren.

§ 10. Praktische Ausrechnung des Mittelwertes L und des Trägheitsmomentes $[p v v]$.

Die Berechnung des Mittelwertes L mittels Gleichung (13) ist schwerfällig. Führen wir dagegen einen Näherungswert N möglichst nahe bei L ein und betrachten als neue Unbekannte den an ihm anzubringenden Zuschlag x, so daß $L = N + x$, zerlegen wir ferner die Beobachtungswerte l in zwei Summanden, so daß

$$\begin{aligned} l_1 &= N + \nu_1 \\ &\vdots \\ l_n &= N + \nu_n , \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} p_1 l_1 &= p_1 N + p_1 \nu_1 \\ &\vdots \\ p_n l_n &= p_n N + p_n \nu_n , \end{aligned}$$

somit

$$[p l] = N[p] + [p \nu]$$

und

$$L = \frac{[p l]}{[p]} = N + \frac{[p \nu]}{[p]} \tag{18}$$

analog Gleichung (7), wenn man beachtet, daß jedes Gewicht p dort $= 1$ war.

Den Wert des Trägheitsmomentes $[p v v]$ entwickeln wir wie folgt:

$$\nu_1 = l_1 - N ,$$

also

$$\nu_1^2 = l_1^2 - 2 l_1 N + N^2$$

und

$$\begin{aligned} p_1 \nu_1 \nu_1 &= p_1 l_1^2 - 2 p_1 l_1 N + p_1 N^2 \\ &\vdots \\ [p \nu \nu] &= [p l l] - 2 N [p l] + N^2 [p] . \end{aligned}$$

Um $[p l l]$ zu eliminieren und gleichzeitig $[p v v]$ in
ie Gleichung einzuführen, substituieren wir aus der
. 47 angeschriebenen Minimumsbedingung

$$[p v v] = L^2 [p] - 2 L [p l] + [p l l],$$

der weil $L = \frac{[p l]}{[p]}$

$$[p v v] = \frac{[p l]^2}{[p]} - 2 \frac{[p l]^2}{[p]} + [p l l],$$

odurch

$$[p \nu \nu] = [p v v] + \frac{[p l]^2}{[p]} - 2 N [p l] + N^2 [p]$$

$$= [p v v] + [p] \left(\frac{[p l]}{[p]} - N\right)^2,$$

lso (in Übereinstimmung mit Gleichung (8), wo
$_1 = p_2 = \cdots = 1$)

19) $$[p v v] = [p \nu \nu] - [p] (L - N)^2.$$

Der Subtrahend ist unter allen Umständen positiv,
lso $[p v v] < [p \nu \nu]$, solange $L - N$ nicht gleich 0, in
Übereinstimmung mit Gleichung (17).

§ 11. Erreichte Beobachtungsgenauigkeit. Gewicht und Genauigkeit des Endwertes.

Im § 8 haben wir festgestellt, daß das Gewicht p
iner Beobachtung l nichts anderes ist, als diejenige Anzahl
on (wirklich ausgeführten oder nur gedachten) Beobach-
ungswiederholungen je vom mittleren Fehler μ, welche
ıötig ist, um den mittleren Fehler m der l zu erreichen.
Dasselbe trifft natürlich auch zu für das Gewicht P des
ndgültigen Wertes L: es ist gleich der Anzahl der zur
Erzielung seines mittleren Fehlers M benötigten Be-
obachtungen je vom mittleren Fehler μ. Sind die zur

Ermittlung des Endwertes L benützten Beobachtungs werte l ungleich genau und kommt dem Beobachtungs werte:

l_1 d. Gewicht p_1 zu, so sind zu seiner Bildg. p_1 Beob. v. Gew.
l_2 " " p_2 " " " " " " p_2 " " "
⋮

verwendet worden. Die Zahl der zur Bildung des End wertes L verwendeten — gleichgültig, ob tatsächlic ausgeführten oder (vgl. § 8) nur substituierten — Be obachtungen vom Gewicht 1 ist daher

$$p_1 + p_2 + \cdots p_n\,, \quad \text{d. h.}$$

der aus einer Anzahl von Beobachtungswer ten $l_1\ l_2 \ldots$, denen bzw. die Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ zukommen, gebildete Endwert L hat das Gewich

$$P_L = [p]\,. \tag{20}$$

Diese Eigenschaft des Endwertes L entspricht der i §§ 8 und 9 gegebenen statischen Deutung: Die im Schwer punkt angreifende Gegenresultante muß beim Vorhanden sein nur parallel wirkender Einzelkräfte p gleich de Summe der letzteren sein, wenn Gleichgewicht bestehe soll.

Ist — etwa aus der Beobachtungsreihe heraus ode durch Schätzung — der mittlere Fehler μ einer Normal beobachtung (Gewichtseinheit) bekannt, so sind wir jetzt imstande, sowohl den mittleren Fehler m_r irgend eines Beobachtungswertes l_r als auch den mittleren Fehler M des Endwertes L abzuleiten. Die Gleichung (15) liefert *hierfür:*

$$\mu^2 : m_r^2 = p_r : 1\,, \text{ also } m_r^2 = \frac{\mu^2}{p_r} \tag{21}$$

$$\mu^2 : M^2 = P : 1\,, \text{ also } \left\{\begin{aligned} M^2 &= \frac{\mu^2}{P} = \frac{\mu^2}{[p]} \\ \frac{1}{M^2} &= \frac{p_1}{\mu^2} + \frac{p_2}{\mu^2} + \cdots \\ &= \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \cdots = \left[\frac{1}{m\,m}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Bei der Ableitung der Gleichungen (20) bis (22) haben wir vorausgesetzt, es sei nicht bloß das Gewicht p jedes einzelnen Beobachtungswertes l, sondern auch der mittlere Fehler μ der Gewichtseinheit von vornherein bekannt, (etwa bei Bildung der in die Rechnung einzuführenden Werte l als Teilmittel aus gleich genauen, wirklich ausgeführten Reihen von Normalbeobachtungen erschlossen). Sie benützend, ist es gelungen, vor der Ausgleichung der Beobachtungen und der Ausrechnung des Endwertes L die ihm innewohnende Genauigkeit, seinen mittleren Fehler M, zu ermitteln: auf die Kenntnis von p und μ gründete sich die Ableitung von P, m und M.

In vielen praktischen Fällen der Vereinigung ungleichwertiger Beobachtungsresultate ist aber neben deren Werten l nur ihr Gewicht p oder ihr mittlerer Fehler m bekannt. Auch in diesem Falle muß uns ein Einblick in die erreichte Beobachtungsgenauigkeit möglich sein, denn wir können nach Gleichung (13) den Endwert der Beobachtungsgröße $L = \frac{[p\,l]}{[p]}$ und nach Gleichung (16) die an den Beobachtungswerten anzubringenden Zuschläge v berechnen:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= L - l_1 \\
v_2 &= L - l_2 \,. \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Je kleiner die nötigen Zuschläge („Verbesserungen") v sind, um jeden Beobachtungswert l zum wahrscheinlichen, dem Endwert L, zu ergänzen, um so genauer sind offenbar die Beobachtungen l ausgeführt, um so sicherer ist also auch der Endwert L bestimmt.

Die Genauigkeitsermittlung stützt sich in diesem Falle auf das Ergebnis L der Ausgleichung, ein etwa daraus errechneter mittlerer Fehler m der Beobachtungswerte l, und M des Endwertes L, muß im Gegensatz zum Vorhergehenden als mittlerer Fehler nach der Ausgleichung bezeichnet werden. Selbstverständlich müßten, strenggenommen, der mittlere Fehler vor uud der mittlere Fehler nach der Ausgleichung, da, wo beide sich überhaupt berechnen lassen, einander gleich sein. Entgegengesetzten Falles wäre zu ergründen, wodurch eine Verschiedenheit beider Werte für dieselbe Größe verursacht werden kann (s. S. 58).

Wären statt der n Beobachtungswerte $l_1 \ldots l_n$, denen je bzw. díe Gewichte $p_1 \ldots p_n$ zukommen, die Werte λ der — gleichgültig, ob tatsächlich ausgeführten oder nur gedachten — Urbeobachtungen je vom Gewicht 1 bekannt, von denen

$$
\begin{aligned}
&p_1 \text{ zur Ermittlung des Wertes } l_1 = \frac{\lambda_1' + \lambda_1'' + \cdots + \lambda_1^{p_1}}{p_1} \\
&\vdots \\
&p_n \quad " \qquad " \qquad " \qquad " \quad l_n = \frac{\lambda_n' + \lambda_n'' + \cdots + \lambda_n^{p_n}}{p_n} \,. \\
&[p] \quad " \qquad " \qquad " \qquad " \quad L = \frac{[\lambda]}{[p]}
\end{aligned}
$$

dienten, so hätte man den Fall gleich genauer Beobachtungen. Man erhielte nach Gleichung (5a) und

(5b) den mittleren Fehler einer solchen Urbeobachtung

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\varphi_w \varphi_w]}{[p]}} = \pm\sqrt{\frac{[\varphi \varphi]}{[p] - 1}}\,, \tag{23}$$

wenn die Werte φ die Verbesserungszuschläge darstellen, welche jeden eingewichtigen Beobachtungswert λ zum Endwerte L ergänzen und welche sich aus den Fehlergleichungen ergeben:

$$\varphi_1' = L - \lambda_1'$$

$$\vdots$$

$$\varphi_1^{p_1} = L - \lambda_1^{p_1}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n^{p_n} = L - \lambda_n^{p_n}\,.$$

Je größer die Zahl der eingewichtigen Urbeobachtungen λ und ihre Genauigkeit ist, um so näher kommt der Endwert L dem wahren Wert, um so näher kommen also die Verbesserungszuschläge φ den wahren Verbesserungen φ_w der Urbeobachtungen λ, und wir können nach Gleichung (5a) sehr genähert setzen: Mittlerer Fehler einer Urbeobachtung λ, berechnet aus der:

1-ten **Beobachtungsgruppe** $l_1 : \mu = \pm\sqrt{\frac{[\varphi_1 \varphi_1]}{p_1}}$

2-ten " $l_2 : \mu = \pm\sqrt{\frac{[\varphi_2 \varphi_2]}{p_2}}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

" $l_n : \mu = \pm\sqrt{\frac{[\varphi_n \varphi_n]}{p_n}}\,,$

Damit liefert Gleichung (11):

Mittlere Fehler m der Teilresultate l aus denen der eingewichtigen Beobachtungen λ

$$m_{l_1} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}} = \pm \frac{1}{p_1} \sqrt{[\varphi_1 \varphi_1]} \,,$$

$$m_{l_2} = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}} = \pm \frac{1}{p_2} \sqrt{[\varphi_2 \varphi_2]} \,.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Wir haben damit die Möglichkeit erlangt, die mittleren Fehler m der (verschieden-gewichtigen) Beobachtungen l aus den Verbesserungen φ der Urbeobachtungen zu errechnen. Zwar sind diese selbst nicht bekannt wohl aber die an den Beobachtungswerten l (deren jeder als Resultat aus p Urbeobachtungen erscheint) anzubringenden Verbesserungen v.

Die zwischen v und φ bestehende Beziehung können wir aber aus Gleichungen (5b) und (11) ermitteln:

nach (5b) ist das Quadrat des mittleren Fehlers einer von n gleich genauen Beobachtungen

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-1} = \frac{1}{n-1} (v_1^2 + v_2^2 + \cdots) \,,$$

nach (11) ist das Quadrat des mittleren Fehlers des Resultates von n gleich genauen Beobachtungen

$$M^2 = \frac{m^2}{n} = \frac{[v\,v]}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{v_1^2}{n} + \frac{v_2^2}{n} + \cdots \right) ,$$

d. h. das Quadrat des mittleren Fehlers vom Resultat und das Quadrat der an den Beobachtungen

anzubringenden Verbesserungen v wachsen im gleichen Verhältnis, oder

$$m^2 : \mu^2 = v^2 : \varphi^2 \; ; \qquad \varphi^2 = v^2 \cdot \frac{\mu^2}{m^2} = v^2 \cdot p \, .$$

Man könnte jetzt zur Bestimmung des mittleren Fehlers μ der Gewichtseinheit die aus v errechnete Verbesserung φ einer Beobachtung vom Gewicht 1 in Gleichung (23) einsetzen. Allein diese Gleichung setzt das Vorhandensein von $[p]$ solcher Verbesserungen φ voraus, während wir deren, entsprechend der Anzahl von Verbesserungen v, nur n besitzen. Wir müssen daher entweder $[\varphi \varphi]$ auf den Betrag erweitern, den diese Summe annimmt, wenn die Zahl der Verbesserungen φ von n auf $[p]$ erhöht wird, d.h. $[\varphi\varphi] = [p v v]$ mit $\frac{[p]}{n}$ erweitern, wodurch wir erhalten

$$(23\text{a}) \qquad \mu = \pm \sqrt{\frac{[\varphi_w \varphi_w]}{[p]} \cdot \frac{[p]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[p\, v_w v_w]}{n}} \, ,$$

oder besser der Zahl n von Summanden entsprechend den Nenner reduzieren, wodurch der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird

$$(23\text{a}) \qquad \mu = \pm \sqrt{\frac{[p\, v_w v_w]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[p\, v\, v]}{n-1}} \, .$$

Wir erhalten schließlich durch Einsetzung von μ in (21) und (22) als mittlere Fehler nach der Ausgleichung:

$$(23\text{b}) \qquad \left.\begin{matrix}\text{mittl. Fehl. d.} \\ \text{Beob.-Wertes } l_r\end{matrix}\right\} \div \cdot m_r = \frac{\mu}{\sqrt{p_r}} = \pm \sqrt{\frac{[p\, v\, v]}{(n-1) p_r}} \, ,$$

$$(23\text{c}) \qquad \left.\begin{matrix}\text{mittl. Fehler d.} \\ \text{Endwertes } L\end{matrix}\right\} \div \cdot M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[p\, v\, v]}{(n-1)[p]}}$$

Beispiel. Eine Strecke L wurde je mit gleicher Genauigkeit gemessen:

a) mit Meßstangen zu $\begin{cases} l_1 = 285{,}34 \\ l_2 = 285{,}40 \\ l_3 = 285{,}30 \\ l_4 = 285{,}44 \end{cases}$ b) mit Meßband zu $\begin{cases} l_5 = 285{,}40 \\ l_6 = 285{,}56 \\ l_7 = 285{,}51 \end{cases}$ c) mit Meßkette zu $\begin{cases} l_8 = 285{,}30 \\ l_9 = 285{,}46 \end{cases}$

Es liefert:

die Messungsgruppe	das Messungsergebnis Gleichung (2)	die mittleren Fehler vor der Ausgleichung Gleichung (5b)	Gleichung (11)
Stangenmessung	$L_{St} = 285{,}37$	$m_{St} = \pm\sqrt{\frac{116}{3}} = \pm 6{,}2$ cm	$M_{St} = \pm\sqrt{\frac{116}{3 \cdot 4}} = \pm 3{,}1$ cm.
Bandmessung	$L_B = 285{,}49$	$m_B = \pm\sqrt{\frac{134}{2}} = \pm 8{,}2$ cm	$M_B = \pm\sqrt{\frac{134}{2 \cdot 3}} = \pm 4{,}7$ cm.
Kettenmessung	$L_K = 285{,}38$	$m_K = \pm\sqrt{\frac{128}{1}} = \pm 11{,}3$ cm	$M_K = \pm\sqrt{\frac{128}{1 \cdot 2}} = \pm 8{,}0$ cm.

Zur Vereinigung der drei ungleichwertigen Ergebnisse der Stangen-, Band- und Kettenmessung haben wir zunächst deren Gewichte p_{St}, p_B und p_K festzustellen. Wählen wir als Gewichtseinheit eine einmalige Kettenmessung, welcher der mittlere Fehler

$$\mu = m_K = \pm\sqrt{128} = \pm 11{,}3 \text{ cm}$$

anhaftet, so wird nach Gleichung (14)

$$p_K = 2\,, \qquad p_B = \frac{3 \cdot 128}{\frac{134}{2}} = 2 \cdot \frac{8{,}0^2}{4{,}7^2} = 5{,}7\,, \qquad p_{St} = \frac{4 \cdot 128}{\frac{116}{3}} = 2 \cdot \frac{8{,}0^2}{3{,}1^2} = 13{,}2\,,$$

Woraus nach Gleichung (20) und (22)

$$P_L = [p] = 20{,}9$$

$$M_L = \pm\frac{\mu}{\sqrt{P}} = \pm\frac{11{,}3}{\sqrt{20{,}9}} = \pm 2{,}5 \text{ cm}$$ als mittlerer Fehler des Endresultates **vor der Ausgleichung**.

Vereinigung der drei Ergebnisse: Für $N = 285{,}30$ liefert Gleichung (18) und (19)

	ν cm	p	$p\nu$ cm	$p\nu\nu$ qcm	v cm		pv cm		pvv qcm
$L_{St} = 285{,}37$	+7	13,2	92,4	646,8	+3,4		+44,9		152
$L_B = 285{,}49$	+19	5,7	108,3	2057,7		−8,6		−48,9	422
$L_K = 285{,}38$	+8	2	16,0	128,0	+2,4		+4,8		11
		20,9	+216,7	2832,5			+49,7	−48,9	585

$$\frac{[p\nu]}{[p]} = +\frac{216{,}7}{20{,}9} = +10{,}4 \text{ cm}$$

$$p\nu\nu = 2832_5 - 20{,}9 \cdot 10{,}4^2 = 2832_5 - 2250 = 583$$

Abrundungsdifferenz 0,8

Abrundungsfehler gegen 583 (s. links) = 2

somit

$$L = N + \frac{[p\nu]}{[p]} = 285{,}40_4$$

als Endresultat aus den drei Messungsgruppen.

Hieraus liefert:

$$(23a)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{585}{2}} = \pm 17{,}2 \text{ cm}$$

$$(23b)\qquad \begin{cases} M_{St} = \pm\sqrt{\dfrac{585}{2\cdot 13{,}2}} = \pm 4{,}7 \text{ cm} \\ M_B = \pm\sqrt{\dfrac{585}{2\cdot 5{,}7}} = \pm 7{,}2 \text{ cm} \\ M_K = \pm\sqrt{\dfrac{585}{2\cdot 2}} = \pm 12{,}1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$(23c)\qquad M = \pm\sqrt{\frac{585}{2\cdot 20{,}9}} = \pm 3{,}7 \text{ cm}$$

als mittlere Fehler nach der Ausgleichung.

Die mittleren Fehler vor der Ausgleichung weichen von denjenigen nach der Ausgleichung erheblich ab (vgl. S. 56). Die Abweichung hat ihre Ursache teils in Ungenauigkeiten der mittleren Fehler m, welche durch solche Beobachtungsfehler erzeugt werden, die, ihrem Betrag nach zwar nicht erheblich genug, um zur Nachmessung zu veranlassen, nach ihrer Entstehung doch den groben Fehlern zugerechnet werden müßten und welche das Messungsergebnis und die Bestimmung des mittleren Fehlers um so stärker beeinflussen, je kleiner die Wiederholungszahl ist. Namentlich wird die Abweichung aber hervorgerufen durch regelmäßige Fehler, die, bei den verschiedenen Beobachtungsgruppen in verschiedenem Betrag auftretend, innerhalb jeder einzelnen Gruppe gleich wirken, in ihr also überhaupt nicht bemerkbar werden.

Hierher gehören: Unrichtigkeiten in der Länge der Meßwerkzeuge (die bei derselben Messungsgruppe überhaupt nicht, wohl aber beim Vergleich der Resultate zweier Gruppen, z. B. einer Stangen- mit der Bandmessung, in die Erscheinung treten), oder in den zur Wägung benutzten Gewichten; Beleuchtungsphasen und Abweichungen von der Vertikalstellung *der Signalstangen* beim Anzielen; regelmäßige Teilungsfehler *teilungen* usw.

II. Abschnitt.

Vermittelnde Beobachtungen.

---

1. Kapitel.

Fortpflanzung von Beobachtungsfehlern auf Funktionen der Beobachtungsgrößen.

§ 12. Mittlerer Fehler M und Gewicht P einer expliziten Funktion F der beobachteten Größen L_1, $L_2 \ldots L_n$, welche mit den mittleren Fehlern m_1, $m_2 \ldots m_n$ behaftet sind.

Die gesuchte Größe X sei als explizite Funktion der Beobachtungsgrößen L_1, $L_2 \ldots L_n$ ausgedrückt:

(24a) $$X = F(L_1, L_2 \ldots L_n).$$

Die Beobachtungsgrößen L seien mit den mittleren Fehlern $\pm m_1$, $\pm m_2$, ... $\pm m_n$ behaftet. Denken wir uns jeden der Beobachtungswerte um seinen (zunächst als positiv vorausgesetzten) mittleren Fehler m vergrößert, so wird der Einfluß dieser Änderung der Bestimmungsgrößen L auf den Funktionswert X sein:

$$E = F(L_1 + m_1, L_2 + m_2, \ldots L_n + m_n) - F(L_1, L_2 \ldots L_n).$$

Entwickeln wir den Minuenden mittels der Taylorschen Reihe, und setzen die mittleren Beobachtungsfehler m als so klein voraus, daß wir berechtigt sind, Potenzen von ihnen, gegenüber den Beobachtungswerten selbst, zu vernachlässigen, so erhalten wir

$$E = F(L_1, L_2 \ldots L_n) + m_1 \frac{\partial F}{\partial L_1} + m_2 \frac{\partial F}{\partial L_2} + \cdots$$
$$+ m_n \frac{\partial F}{\partial L_n} - F(L_1, L_2, \ldots L_n)$$
$$= m_1 \frac{\partial F}{\partial L_1} + m_2 \frac{\partial F}{\partial L_2} + \cdots + m_n \frac{\partial F}{\partial L_n}.$$

Dieser Ausdruck geht über in

$$E = + m_1 l_1 + m_2 l_2 + \cdots + m_n l_n,$$

wenn man den Differentialquotienten

$$\frac{\partial F}{\partial L_r} = l_r \tag{24 b}$$

setzt.

Nun werden wir berechtigt sein, die Gesamtwirkung der mittleren Fehler m der Beobachtungsgrößen L auf die Funktion X als deren mittleren Fehler M_X zu bezeichnen, wenn es uns gelingt, bei Berechnung dieser Gesamtwirkung der Tatsache Rechnung zu tragen, daß diese mittleren Fehler im Vorzeichen unbestimmt sind, sich also im Zusammenwirken teilweise aufheben können. Der soeben berechnete Fehlereinfluß E setzt aber, im Gegensatz hierzu, alle mittleren Beobachtungsfehler m als gleich gerichtet voraus, ist also jedenfalls $> M_X$. Immerhin wird er uns zum gesuchten mittleren Fehler M_X führen, wenn wir durch Quadrieren die Vorzeichen der m eliminieren. Kehren wir zu diesem Zwecke zur tatsächlich vorhandenen Unbestimmtheit der Vorzeichen von m zurück, so erhalten wir als Quadrat des Einflusses der Änderungen $\pm m$ an den Beobachtungsgrößen L

$$E^2 = m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2 + \cdots + m_n^2 l_n^2 \pm 2 m_1 m_2 l_1 l_2 \pm 2 m_1 m_3 l_1 l_3 \pm \cdots$$
$$\pm 2 m_2 m_3 l_2 l_3 \pm \cdots \pm 2 m_{n-1} m_n l_{n-1} l_n.$$

Die Zahl der Summanden von der Form $m_1 m_2 l_1 l_2$ ist $= n \cdot (n-1)$, diejenige der quadratischen Summanden nur gleich n. Dem absoluten Wert nach ist aber die Summe je zweier quadratischer Summanden unter allen Umständen größer als das zugehörige doppelte Produkt ($a^2 + b^2 > 2ab$, weil $a^2 + b^2 - 2ab = [a-b]^2 =$ positiv). Überdies sind die quadratischen Summanden alle positiv, die anderen gleich wahrscheinlich $\pm$ und von ähnlicher Größe, so daß sie gegen die ersteren um so mehr zurücktreten, je größer ihre Zahl ist. Die Unbestimmtheit des Vorzeichens von m hat also zur Folge, daß die letzteren Summanden sich in der Hauptsache gegenseitig aufheben und daß der ermittelte Wert für E^2 übergeht in das Quadrat des mittleren Fehlers:

$$(24\text{c}) \quad M_X^2 = m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2 + \cdots + m_n^2 l_n^2 = [m\,m\,l\,l]\,.$$

Das Gewicht P_X der Unbekannten X erhalten wir durch Vergleichung der mittleren Fehler nach Gleichung (15). Ist nämlich μ der (event. beliebig festgesetzte) mittlere Fehler der Gewichtseinheit ($p = 1$), so ist

$$P_x : 1 = \mu^2 : M^2$$

$$(24\text{d}) \quad \frac{1}{P_x} = \frac{M^2}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}[m\,m\,l\,l] = \frac{m_1^2}{\mu^2} l_1^2 + \frac{m_2^2}{\mu^2} l_2^2 + \cdots$$

Durch Einführung der Gewichte p für die Beobachtungsgrößen L und unter Benutzung von (14) wird hieraus

$$(24\text{d}) \qquad \frac{1}{P_x} = \frac{l_1^2}{p_1} + \frac{l_2^2}{p_2} + \cdots = \left[\frac{l\,l}{p}\right].$$

1. Beispiel. Wie groß ist der mittlere Fehler m und das Gewicht P von $X = a\,L$, wenn a ein fehlerfreier Faktor und L eine mit dem mittleren Fehler m beobachtete Größe ist?

Gleichung (24c) liefert:

$$M_{aL}^2 = [m\,m\,l\,l] = m^2 \left(\frac{\partial X}{\partial L}\right)^2 = a^2 m^2$$

$$M_{aL} = a \cdot m_L$$

in Übereinstimmung mit der früher abgeleiteten Gleichung (9).

Gleichung (24d) liefert:

$$\frac{1}{P_X} = \left[\frac{l\,l}{p}\right] = \frac{a^2}{p},$$

$$P_X = P_{a \cdot L} = \frac{p}{a^2},$$

wenn p das Gewicht der Beobachtungsgröße L vorstellt.

2. Beispiel. Wie groß ist der mittlere Fehler M und das Gewicht P der Größe $X = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n$, wenn $L_1 \ldots$ beobachtete Größen sind, denen die Gewichte $p_1 \ldots$ und die mittleren Fehler $m_1 \ldots$ zukommen.

Gleichung (24c) liefert:

$$M_X^2 = [m\,m\,l\,l] = m_1^2 \left(\frac{\partial X}{\partial L_1}\right)^2 + m_2^2 \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial L_2}\right)^2 + \cdots$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2 = [m\,m]$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (10).

Gleichung (24d) liefert:

$$\frac{1}{P_X} = \left[\frac{l\,l}{p}\right] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \left[\frac{1}{p}\right].$$

Sind die Gewichte und die mittleren Fehler der Einzelgrößen L einander gleich (wie das z. B. beim Wägen einer Masse in n Teilen, beim Messen von Strecken für jede einzelne der n Stangenlagen, oder bei Bildung eines Winkels durch Zusammensetzung aus n Teilen usw. der Fall ist), so wird

$$M_{L_1 \pm L_2 \pm \cdots} = \pm\sqrt{[m\,m]} = \pm\sqrt{n \cdot m^2} = m\sqrt{n}$$

$$\frac{1}{P_{L_1 \pm L_2 \pm \cdots}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_1} = \frac{n}{p_1}$$

$$P_{L_1 \pm L_2 \pm \cdots} = \frac{p}{n},$$

d. h. der mittlere **Fehler einer Summe oder Differenz gleichwertiger** *Einzelgrößen* **wächst proportional der Wurzel aus ihrer Anzahl.**

das Gewicht einer Summe oder Differenz gleichwertiger Einzelgrößen nimmt ab proportional ihrer Anzahl.

Es zeigt sich hier ein bemerkenswerter Unterschied, der für die Genauigkeit einer Größe bezeichnend ist:

Wird eine Größe gewonnen als Mittel aus n Beobachtungen je vom Gewicht $p = 1$, so ist das Gewicht des Mittelwertes $P = n$,

wird eine Größe gewonnen durch Addition oder Subtraktion von n Einzelgrößen je vom Gewicht $p = 1$, so ist ihr Gewicht $P = \frac{1}{n}$,

wird eine Größe gewonnen durch Multiplikation einer beobachteten Größe vom Gewicht $p = 1$ mit einer Konstanten n, so ist ihr Gewicht $P = \frac{1}{n^2}$ (Distanzmesser usw.).

Es bedürfte also im zweiten Falle n-facher, im dritten Falle n^2-facher Beobachtungswiederholung der Teilgröße, um das Gewicht und die Genauigkeit einer einzigen einfachen direkten Beobachtung für die gesuchte Größe zu erzielen.

3. Beispiel. Wie groß ist der mittlere Fehler einer Dreiecksseite $AB = c$ und ihr Gewicht, wenn gemessen wurde:

$$b = AC = 106{,}00 \pm 0{,}06 \text{ m}$$
$$\sphericalangle \beta = 29^\circ\, 39' \pm 1'$$
$$\sphericalangle \gamma = 120^\circ\, 07' \pm 2' \;?$$

Die Trigonometrie liefert die Beziehung

$$c = \frac{b}{\sin\beta} \sin\gamma\,,$$

woraus mittels Gleichung (24c)

$$M_c^2 = \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \gamma}\right)^2 m_\gamma^2$$
$$= \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} m_b^2 + \left(\frac{b \sin\gamma}{\sin^2\beta} \cos\beta\right)^2 m_\beta^2 + \left(\frac{b}{\sin\beta} \cos\gamma\right)^2 m_\gamma^2$$
$$= \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} m_b^2 + c^2 \operatorname{ctg}^2\beta\, m_\beta^2 + c^2 \operatorname{ctg}^2\gamma \cdot m_\gamma^2$$

(m_β und m_γ in analytischem Maß ausgedrückt).

Statt die mittleren Beobachtungsfehler m_β und m_γ durch Division mit ϱ' auf analytisches Maß zurückzuführen, können wir auch die zugehörigen partiellen Ableitungen mit ϱ' dividieren und als Winkeleinheit die Minute, als Längeneinheit das cm wählen, wodurch wir erhalten:

$$M_C^2 = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}\cdot 6^2 + \frac{c^2\operatorname{ctg}^2\beta}{\varrho'^2}\cdot 1^2 + \frac{c^2\operatorname{ctg}^2\gamma}{\varrho'^2}\cdot 2^2$$

b	2·02531
$\varepsilon \sin\beta$	0·30566
$\sin\gamma$	9·93702
$185.35 = c$	2·26799

$\sin\beta$	9·6943
$\sin\gamma$	9·9370
l_1	0·2427
$3{,}06 = l_1^2$	0·4854

$90{,}25 = l_2^2$	1·9528
l_2	0·9764
$\operatorname{ctg}\beta$	0·2447
c	4·2680
$\varepsilon\,\varrho'$	6·4637
$\operatorname{ctg}\gamma$	9·7635
l_3	0·4952
$9{,}78 = l_3^2$	0·9904

$$M_c^2 = 3{,}06\cdot 36 + 90{,}25\cdot 1 + 9{,}78\cdot 4$$
$$= 110 + 90 + 39 = 239 = [m\,m\,l\,l]\,,$$
$$M_c = \pm\sqrt{239} = 15{,}5 \text{ cm.}$$

Also ist
$$c = 185{,}35 \pm 0{,}15_5 \text{ m.}$$

Einfacher noch läßt sich der mittlere Fehler einer Funktion von der obigen Form mittels Logarithmieren finden. Wir haben
$$\log c = \log b + \log\sin\gamma - \log\sin\beta\,,$$
somit nach Gleichnng (10)
$$M_{\log c} = \sqrt{m^2_{\log b} + m^2_{\log\sin\gamma} + m^2_{\log\sin\beta}}\,.$$

Man hat jetzt nur beim Aufschlagen von $\left\{\begin{matrix}\log b\\ \log\sin\gamma\\ \log\sin\beta\end{matrix}\right\}$ gleichzeitig zu notieren, welchen Einfluß auf die letzte (fünfte) Stelle des log eine Änderung des numerus um $\left\{\begin{matrix}6 \text{ cm}\\ 2'\\ 1'\end{matrix}\right\}$ ausübt (s. unten).

		$m_{\log}$	$m^2_{\log}$
b	2·02531	24_6	605
$\varepsilon \sin \beta$	0·30566	22	484
$\sin \gamma$	9·93702	7	49
$185{,}35 \pm 0{,}15 = c$	$2{\cdot}26799 \pm 34$		1138

woraus $m_{\log c} = \pm \sqrt{1138} = \pm 34$.

Ein mittlerer Fehler des $\log c$ von ± 34 Einheiten der fünften Stelle liefert (gleichzeitig mit dem Aufschlagen von c) den mittleren Fehler des numerus $M_c = \pm 15$ cm.

Das Gewicht P der berechneten Seite c erhalten wir mittels Gleichung (24 d)

$$\frac{1}{P_c} = \frac{1}{\mu^2} [m\, m\, l\, l] = \frac{239}{\mu^2} .$$

Geben wir der Messung der Seite b das Gewicht 1, so wird $\mu = 6$ cm und $\mu^2 = 36$, somit

$$\frac{1}{P_c} = \frac{239}{36}$$

$$P_C = \frac{36}{239} = 0{,}15 .$$

---

2. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder gleich genauer Beobachtungen.

Durch den Abschnitt I wurden wir in die Lage versetzt, den wahrscheinlichsten Wert einer direkt und mehrfach beobachteten Größe, seinen mittleren Fehler und sein Gewicht zu bestimmen. Dagegen hat er uns nicht gelehrt, in überschüssiger Zahl vorhandene Beobachtungen auszugleichen, welche zur Bestimmung einer oder mehrerer anderer, *von ihnen* abhängiger Größen dienen sollen.

Auch das 1. Kapitel des gegenwärtigen Abschnittes zeigte uns nicht, wie die Werte L für solche vermittelnde Größen auszugleichen, wenn sie in überschüssiger Zahl vorhanden sind, sondern nur, wie sich der ihnen anhaftende Fehler m auf einen (nicht überbestimmten) Funktionswert fortpflanzt.

Jetzt wollen wir Beobachtungswerte, welche zur Berechnung anderer, von ihnen abbängiger Größen dienen sollen und in überschüssiger Zahl vorhanden sind, so ausgleichen, daß letztere sich übereinstimmend ergeben, gleichgültig, welche der ersteren auch zur Rechnung benützt werden mögen.

Ist die Zahl der gesuchten Unbekannten nicht größer als 2, so läßt sich die Ausgleichung der zu ihrer Berechnung dienenden Beobachtungswerte häufig auf graphischem Wege bewirken, womit der Vorzug erhöhter Anschaulichkeit und der alsbaldigen Erkenntnis etwaiger grober Beobachtungsfehler verbunden ist. Wir behandeln daher zuerst die:

§ 13. Graphische Ausgleichung zusammengehöriger, beobachteter Argument- und Funktionswerte bei zwischen ihnen bestehender bekannter oder unbekannter Beziehung. Beobachtungsfehler.

Um zu untersuchen, ob zwei Größen voneinander abhängig sind, und zutreffendenfalls, welche Beziehung zwischen ihnen besteht, kann man korrespondierende (zusammengehörige) Beobachtungswerte beider als Abszissen und Ordinaten in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem auftragen und die dadurch erhaltenen Punkte durch eine stetige Linie (Funktionskurve) verbinden. Verläuft die Linie gesetzlos oder parallel, bzw. senkrecht zur Abszisse, so besteht entweder keine Beziehung zwischen den korrespondierenden Beobachtungswerten, sie

sind voneinander unabhängig, oder die beobachteten Funktionswerte sind nicht bloß von den der Beobachtung unterworfenen, sondern überdies noch von anderen Argumenten abhängig.

Im letzteren Falle kann man die korrespondierenden Beobachtungen unter gewissen abgewarteten oder künstlich herbeigeführten, die Wirkung jener weiteren Argumente vorübergehend ausschaltenden Umständen wiederholen.

Läßt die „Funktionskurve" nach den Sätzen der analytischen Geometrie ein gewisses Gesetz erkennen — gerade Linie zeigt lineare Beziehung, n-fache Oszillation algebraische Beziehung $(n+1)$-ten Grades an —, so kann man der Zeichnung die Lage- und Formbeziehungen (Abschnitt auf der y-Achse, Richtungskoeffizient, Parameter usw.) entnehmen: Die Verbindungslinie der mit den zusammengehörigen Beobachtungswerten als Koordinaten aufgetragenen Punkte (Funktionslinie) vermittelt uns die Kenntnis der zwischen beiden bestehenden Beziehung.

Dabei wird das Wesen der Funktionskurve von der Wahl der Verjüngungsverhältnisse für die Abszissen und die Ordinaten und von der Lage der Koordinatenachsen nicht berührt. Ja, es kann sich sogar empfehlen (auch ohne daß die zusammengehörigen Beobachtungswerte Größen verschiedener Gattung sind, in welchem Falle für jeden von beiden je ein passendes Verjüngungsverhältnis gewählt werden muß), Ordinaten und Abszissen in verschiedener Verjüngung zu zeichnen, wenn sie sich erheblich voneinander unterscheiden, oder wenn man auf schärfere Darstellung von Veränderungen einer von ihnen besonderen Wert legt.

Wären die Beobachtungswerte fehlerfrei, so müßte die zu *zeichnende* Funktionskurve durch sämtliche auf

Grund solcher zusammengehöriger Werte gezeichnete Punkte gehen. Es zeigt sich in der Durchführung jedoch, namentlich wenn ein genügend großer Maßstab gewählt wird, sofort, daß die derart zu zeichnende Linie Unregelmäßigkeiten aufweisen würde, die nicht in der Natur der Beziehung zwischen beiden Beobachtungsgrößen liegen können. Dies tritt besonders in solchen Fällen in die Erscheinung, in denen das Wesen der Beziehung auch noch auf deduktivem Wege erschlossen werden kann. Solche Unregelmäßigkeiten rühren von den den Beobachtungswerten anhaftenden Fehlern v her, und unsere Aufgabe besteht jetzt darin, eine der erschlossenen Beziehung entsprechende oder (falls diese nicht erschlossen werden kann) eine möglichst einfache Funktionslinie den gezeichneten Punkten so anzupassen, daß die in der Ordinatenrichtung gemessenen Abweichungen v der Linie von jenen Punkten den Bedingungen (1) $[v] = 0$ und (4) $[v\,v] =$ Min. entsprechen.

Als Nebenprodukt dieser Lösung ergibt sich dann auf bequemste Weise:

a) diejenige Stelle, wo zur sicheren Ermittelung der bestehenden Beziehung, und Zeichnung der Funktionslinie die korrespondierenden Beobachtungen zu häufen sind, bzw. wo andererseits Häufung unnütz wäre,

b) der Nachweis etwaiger grober Fehler,

c) der dem einzelnen Beobachtungswerte anhaftende, durch Ausgleichung wegzuschaffende Fehler v,

d) der irgend einem Argumentwerte zugehörige ausgeglichene Funktionswert.

Beispiel. Zum Zwecke der Wiederherstellung der wahrscheinlichen Lage einer Baulinie an einer bauplanmäßig 15,00 m breiten Straße wurde eine Anzahl sicherer Gebäudeecken auf *eine vorläufige, zu ihr* im Abstande von 3 m ungefähr parallel

verlaufende Abszisse aufgenommen. Gesucht ist die Lage der allen Gebäudeecken möglichst sich anpassenden, endgültigen Parallelen.

Lösung. Die abgesteckte Abszisse sowohl, als die gesuchte endgültige Parallele zur wahrscheinlichen Baulinie sind gerade Linien. Wäre es daher möglich, die Entfernungen irgendwelcher, einander gegenüberliegender Punkte beider Geraden zu finden, so könnte man sie als Ordinaten zur abgesteckten Linie als Abszissenachse und zu den zugehörigen Abszissenmaßen auftragen. Die Verbindungslinie der dadurch erhaltenen Punkte müßte dann eine Gerade sein und die Abszissenachse in demselben Punkte schneiden, in dem in Wirklichkeit die gesuchte Parallele die abgesteckte Aufnahmelinie schneidet. Daran würde nichts geändert, auch wenn die genannten Entfernungen (die nur klein sein können) etwa in größerem Maßstabe als die Abszissen aufgetragen würden. Diese Entfernungen zwischen beiden, nur um weniges divergenten Geraden lassen sich nun wie folgt berechnen: Setzen wir voraus, daß die aufgenommenen Gebäudeecken genau auf den Baulinien liegen, also genau den Abstand $a_1 = 3$ m bzw. $a_2 = 12$ m von der gesuchten Parallelen haben. Setzen wir ferner voraus, daß ihre von uns aufgenommenen Ordinaten y fehlerfrei gemessen sind, so erhalten wir von der abgesteckten Abszisse aus je einen Punkt der gesuchten Parallelen, wenn wir (unter Beachtung, daß wegen der geringen Divergenz von abgesteckter und Solllinie die bezüglichen Ordinaten ihrer Lage nach zusammenfallen) im betreffenden Fußpunkt die Ordinate

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{y}_1 = y_1 - a_1 & \mathfrak{y}_3 = y_3 - a_2 \\ \mathfrak{y}_2 = y_2 - a_2 & \mathfrak{y}_4 = y_4 - a_4 \end{array} \right\}$$

nach Richtung und Größe auftragen. Die wahre gegenseitige Lage beider Geraden ist dann in der Figur direkt ersichtlich: Die Funktionslinie stellt die Solllinie vor. Da die berechneten und für die gesuchte Lage der Solllinie bestimmenden Ordinaten $\mathfrak{y}$ von Punkten der letzteren sehr klein sind im Verhältnis zu den zugehörigen Abszissen, so wird man beide in verschiedenem Maßstabe (etwa die Abszissen im Maßstabe 1:1000, die Ordinaten $\mathfrak{y}$ in 1:10) auftragen.

Würde nun die (durch Überlegung als Gerade erkannte) *Funktionslinie* durch alle derart gezeichneten Punkte gehen, *so wären Lage* der Gebäudeecken und eigene Messung feh-

frei und eine Ausgleichung unnötig. Anderenfalls muß jetzt diejenige Gerade gesucht werden, für welche die algebraische Summe der in der Ordinatenrichtung gemessenen Abstände v von den Fehlerbildpunkten $= 0$ ($[v] = 0$) und, da die Zahl solcher Geraden ∞ ist, gleichzeitig $[v\,v] =$ Min. wird.

Alle die Geraden, für welche $[v] = 0$, gehen durch einen Punkt, den Schwerpunkt S des Systems gezeichneter Punkte, dessen Koordinaten

$$\begin{cases} x_S = \dfrac{[x]}{n} \\[2mm] y_S = \dfrac{[\mathfrak{y}]}{n} \end{cases} \quad \text{sind.}$$

Zahlenbeispiel.

Punkt Nr.	Gemessen Abszisse $+x$ m	Ordinate y m	Sollordinate a m	$\mathfrak{y} = y - a$ cm
1	53,95	− 3,06	− 3,00	− 6
2	57,02	+11,94	+12,00	− 6
3	72,54	+11,98	+12,00	− 2
4	94,86	− 2,94	− 3,00	+ 6
5	140,22	+12,08	+12,00	+ 8
6	161,05	− 2,95	− 3,00	+ 5
7	212,84	− 3,00	− 3,00	0
8	221,95	+12,07	+12,00	+ 7
9	245,36	− 2,90	− 3,00	+10

$x_S = \dfrac{1259,79}{9} = 139,98$ m $\qquad \mathfrak{y}_S = \dfrac{+22}{9} = +2,44$ cm

Um die Lage der Geraden zu finden, für welche $[v\,v] =$ Min., kann man jetzt für 3 oder mehr verschiedene, durch den Schwerpunkt S gehende Versuchsgeraden die Abstände v von den Fehlerbildpunkten (in der Ordinatenrichtung) *abgreifen (wobei $[v]=0$ sein wird)* und je $[v\,v]$ berechnen. Trägt *man dann diese* Werte $[v\,v]$ als Ordinaten in den Schnittpunkten

usw. dieser Versuchsgeraden mit irgend einer der ur-
:lichen Ordinaten als Fußpunkten auf und zeichnet durch
haltenen Punkte eine zu dieser neuen Ordinatenrichtung
r alten x-Achse) symmetrische Kurve, so stellt die Ordi-

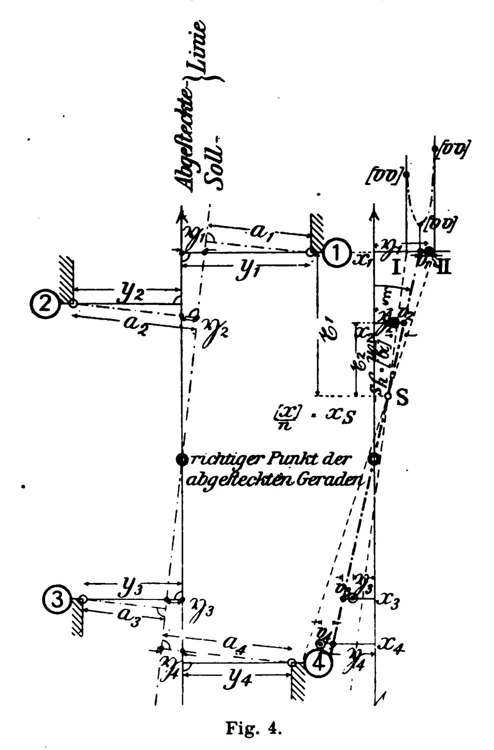


Fig. 4.

les unteren Kulminationspunktes den niedersten Wert
v], deren Fußpunkt einen zweiten Punkt der Sollgeraden
Nach Einzeichnung der letzteren wird man für das
värtige *Beispiel* aus der Figur ablesen: Die gesuchte

Gerade schneidet die abgesteckte bei der Abszisse 98 m und ist gegenüber der letzteren um 6 cm auf 100 m Länge im positiven Sinn verdreht.

Das gezeigte Verfahren zur rein graphischen Auffindung der Funktionslinie ist schwerfällig. Bequemer ist es, zu diesem Zweck das graphische Verfahren durch Rechnung zu unterstützen.

Zieht man durch S eine beliebige Gerade S — I und greift in der Ordinatenrichtung deren Entfernungen V von den gezeichneten Punkten ab, so wird für sie zwar $[V] = 0$, aber nicht $[V\,V] =$ Min. sein. Es ist vielmehr zu diesem Zwecke noch eine gewisse Verdrehung um den unbekannten Winkel ξ und um den Schwerpunkt S nötig. Diese Verdrehung ändert sämtliche Entfernungen V um den Betrag $\mathfrak{x} \cdot \xi$, wenn $\mathfrak{x}$ die Entfernungen der Fußpunkte vom Schwerpunkt S darstellen. Es wird daher an Stelle von V der Abstand v der endgültigen Funktionslinie vom Fehlerbildpunkte treten, wo bei Einführung von Vorzeichen für die verschiedenen Richtungen von $\mathfrak{x}$, v, V und ξ allgemein gültig

$$v = V - \mathfrak{x}\,\xi$$

und wobei wir verlangen:

$$[v\,v] = \text{Min.}$$

Es muß demnach sein

$$[(V - \mathfrak{x}\,\xi)^2] = V_1^2 - 2\,V_1\,\mathfrak{x}_1\,\xi + \mathfrak{x}_1^2\,\xi^2 + \cdots + V_n^2 - 2\,V_n\,\mathfrak{x}_n\,\xi + \mathfrak{x}_n^2\,\xi^2 = \text{Min.}$$

Die einzige Veränderliche ist jetzt ξ, und man hat

$$F_{(\xi)} = [(V - \mathfrak{x}\,\xi)^2] = \text{Min.}$$

für

$$\frac{dF}{d\xi} = 0 = -2\,V_1\,\mathfrak{x}_1 + 2\,\mathfrak{x}_1^2\,\xi - \cdots - 2\,V_n\,\mathfrak{x}_n + 2\,\mathfrak{x}_n^2\,\xi\,,$$

woraus

$$\xi = \frac{2\,V_1\,\mathfrak{x}_1 + 2\,V_2\,\mathfrak{x}_2 + \cdots + 2\,V_n\,\mathfrak{x}_n}{2\,\mathfrak{x}_1^2 + 2\,\mathfrak{x}_2^2 + \cdots + 2\,\mathfrak{x}_n^2} = \frac{[V\,\mathfrak{x}]}{[\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}]}\,.$$

Für die praktische Durchführung wird man natürlich nicht eine beliebige Gerade verwenden, von der aus der *Verdrehungswinkel* ξ berechnet wird, sondern eine Parallele zur

Aufnahmelinie durch den Schwerpunkt S. Damit wird allgemein gültig:

$$\mathfrak{x} = x - x_S = x - \frac{[x]}{n}$$

$$V = \mathfrak{y} - \mathfrak{y}_S = \mathfrak{y} - \frac{[\mathfrak{y}]}{n}.$$

Man hat also nur die Durchschnittswerte der Abszissen und der Ordinaten je von den letzteren abzuziehen, ein Verfahren, das wir noch des öfteren, z. B. bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Rückwärtseinschnitt anwenden werden.

Die obige Tabelle liefert jetzt

Punkt Nr.	$\mathfrak{x} = x - x_S$ m		$V = \mathfrak{y} - \mathfrak{y}_S$ cm		$\mathfrak{x} \cdot V$ (Rechenschieber)		$\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}$
	+	−	+	−	+	−	
1		86,03		8,44	725		7 401
2		82,96		8,44	700		6 882
3		67,44		4,44	299		4 548
4		45,12	3,56			161	2 036
5	0,24		5,56		1		0
6	21,07		2,56		54		444
7	72,86			2,44		178	5 309
8	81,97		4,56		374		6 719
9	105,38		7,56		797		11 105
	281,52	281,55	23,80	23,76	2950	339	44 444

Abrundung 3. +2611

oder 26,11 für v in Mtrn.

$$\xi_{\text{analytisch}} = + \frac{26{,}11}{44\,444} = +0{,}000\,587\,,$$

also: nötige Verdrehung ξ in positivem Sinn um 5,9 cm auf 100 m.

Schnittpunkt der Solllinie mit der Abszisse

vom Schwerpunkt S rückwärts um $\frac{100 \cdot 2{,}44}{5{,}87} = 41{,}5$ m.

d. h. bei Abszisse 139,98 — 41,5 = 98,5 m.

§ 14. Rechnerische Ausgleichung in überschüssiger Zahl vorhandener Beobachtungswerte L bei bekannter Beziehung zwischen ihnen und den von ihnen abhängigen, gesuchten Größen X, Y ... bis zur Aufstellung der Normalgleichungen.

Die zwischen den Beobachtungsgrößen L und den von ihnen abhängigen Unbekannten X, Y ... bestehenden Beziehungen mögen von der Form sein:

$$F(X, Y, Z \dots) - L = 0 , \tag{25}$$

so daß sie jede Beobachtungsgröße L als explizite Funktion der Unbekannten X, Y ... ergeben. Diese Gleichungen werden von den Beobachtungswerten L nur dann scharf erfüllt sein können, wenn letztere entweder fehlerfrei sind, oder wenn keine Überbestimmung vorhanden ist. Beides ist für unsere gegenwärtige Betrachtung ausgeschlossen. Wir müssen vielmehr, um die Beziehungen scharf zu erfüllen, unseren Beobachtungswerten kleine, zunächst noch unbekannte Verbesserungszuschläge beifügen, die wir wie bisher mit v bezeichnen wollen. Dann stellt $L + v$ den wahrscheinlichsten Beobachtungswert und v den Beobachtungsfehler vor, und die Gleichung (25) geht über in die Form

$$F(X, Y, Z \dots) - L = v . \tag{25a}$$

Wir suchen nun zunächst diese Beziehungen in lineare Form überzuführen, eine Aufgabe, die allgemein nur möglich ist, wenn es uns gelingt, die Unbekannten X, Y, Z ... durch andere x, y, z zu ersetzen, die so klein sind, daß wir höhere Potenzen von ihnen vernachlässigen dürfen. Zu diesem Zweck schlagen wir folgenden Weg ein: Wir zerlegen jede der Unbekannten analog *Gleichung (7)* und (18) in 2 Summanden, nämlich

einen möglichst genauen, irgendwie zu gewinnenden Näherungswert $N_X \ldots$ und einen kleinen, nach Richtung und Größe unbekannten Zuschlag $x \ldots$, wodurch unsere Gleichung (25a) übergeht in

$$F\{(N_X + x), (N_Y + y), (N_Z + z), \ldots\} - L = v. \tag{25b}$$

Sodann entwickeln wir nach Taylor in eine Reihe und erhalten unter vorstehender Voraussetzung:

$$\left\{\begin{aligned} F(N_X, N_Y, N_Z \ldots) + x \frac{\partial F}{\partial N_X} + y \frac{\partial F}{\partial N_Y} \\ + z \frac{\partial F}{\partial N_Z} + \cdots - L = v. \end{aligned}\right. \tag{25c}$$

Fassen wir die bekannten Summanden zusammen (wozu jetzt auch $F(N_X, N_Y, N_Z \ldots)$ gehört) und führen zur Vereinfachung der Schreibweise folgende Bezeichnungen ein:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial N_X} = a, \quad \frac{\partial F}{\partial N_Y} = b, \quad \frac{\partial F}{\partial N_Z} = c \ldots \\ F(N_X, N_Y, N_Z, \ldots) - L = l, \end{aligned}\right. \tag{25d}$$

so geht die gegebene Beziehung (25) in die Form der „Fehlergleichung“ über:

$$a x + b y + c z + \cdots + l = v. \tag{25e}$$

Solcher Fehlergleichungen haben wir ebenso viele, als Beobachtungen L vorhanden sind, nämlich λ. Überbestimmung ist vorhanden und Ausgleichung der Werte l kann also erst eintreten, wenn die Zahl λ der Beobachtungen größer ist, als die Zahl $\varkappa$ der Unbekannten. Für $\lambda = k$ werden die Verbesserungen v der Beobachtungswerte $= 0$: für die Unbekannten $x, \ldots$ ist in diesem Falle keine Überbestimmung vorhanden.

Aus den λ Fehlergleichungen für die $\varkappa$ Unbekannten

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots + l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots + l_2 &= v_2 \\ &\vdots \\ a_\lambda x + b_\lambda y + c_\lambda z + \cdots + l_\lambda &= v_\lambda\,, \end{aligned}\right\} \lambda \text{ Gleichg.}$$

$\longleftarrow \varkappa$ Unbekannte $\longrightarrow$

wo $\lambda > \varkappa$, ergeben sich die Werte der unbekannten Zuschläge $x, y \ldots$, die wir künftig kurz als Unbekannte bezeichnen wollen, eindeutig, wenn wir noch die in Gleichung (4) ausgedrückte Bedingung zu Hilfe nehmen, daß die Summe der Quadrate der an den Beobachtungswerten L anzubringenden Verbesserungen v ein Minimum sei:

$$[v\,v] = \text{Min.}$$

Man erhält nämlich:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= a_1^2 x^2 + 2\,a_1\,b_1\,x\,y + 2\,a_1\,c_1\,x\,z + \cdots + 2\,a_1\,l_1\,x + b_1^2 y^2 \\ &\quad + 2 b_1 c_1 y z + \cdots + 2 b_1 l_1 y + c_1^2 z^2 + \cdots + 2\,c_1\,l_1\,z + \cdots + l_1^2 \\ v_2^2 &= a_2^2 x^2 + 2\,a_2\,b_2\,x\,y + 2\,a_2\,c_2\,x\,z + \cdots + 2\,a_2\,l_2\,x + b_2^2 y^2 \\ &\quad + 2 b_2 c_2 y z + \cdots + 2 b_2 l_2 y + c_2^2 z^2 + \cdots + 2\,c_2\,l_2\,z + \cdots + l_2^2\,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

woraus durch Addition

$$\begin{aligned} [v^2] &= [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z + \cdots + 2\,[a\,l]\,x + [b^2]\,y^2 \\ &\quad + 2\,[b\,c]\,y\,z + \cdots + 2\,[b\,l]\,y + [c^2]\,z^2 + \cdots + 2\,[c\,l]\,z + [l^2]\,. \end{aligned}$$

Wir haben jetzt diejenigen Werte für $x, \ldots$ zu suchen, für welche $[v\,v] = \text{Min.}$ Hierfür haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [v\,v]}{\partial x} &= 2\,[a\,a]\,x + 2\,[a\,b]\,y + 2\,[a\,c]\,z + \cdots + 2\,[a\,l] = 0 \\ \frac{\partial [v\,v]}{\partial y} &= 2\,[a\,b]\,x + 2\,[b\,b]\,y + 2\,[b\,c]\,z + \cdots + 2\,[b\,l] = 0 \\ \frac{\partial [v\,v]}{\partial z} &= 2\,[a\,c]\,x + 2\,[b\,c]\,y + 2\,[c\,c]\,z + \cdots + 2\,[c\,l] = 0\,. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Eine kurze Betrachtung zeigt, daß wir auf dieselbe Weise ganz allgemein ebenso viele Gleichungen für $x, y, z \dots$ in der vorstehenden Form erhalten, als Unbekannte vorhanden sind, und damit ein Mittel für die eindeutige Bestimmung der letzteren. Durch Kürzung mit 2 erhält man aus ihnen die „Normalgleichungen“

$$(26) \quad \begin{cases} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + \cdots + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + \cdots + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + \cdots + [c\,l] = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

mit deren Aufstellung die Ausgleichungsaufgabe prinzipiell gelöst ist.

§ 15. Auflösung der Normalgleichungen.

a) Ist nur eine einzige Unbekannte X vorhanden, welche mit den λ Beobachtungswerten L in der Beziehung steht

$$F(X) - L = 0\,,$$

so erhält man nach § 14 durch Einführung eines Näherungswertes N_X für X (so daß $X = N_x + x$) die λ Fehlergleichungen von der Form

$$\frac{\partial F}{\partial N_X}\,x + (F_{N_X} - L) = v\,,$$

oder mit Benützung der unter (25 d) eingeführten Zeichen

$$\begin{aligned} a_1\,x + l_1 &= v_1 \\ a_2\,x + l_2 &= v_2 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} v_1^2 &= a_1^2\,x^2 + 2\,a_1\,l_1\,x + l_1^2 \\ v_2^2 &= a_2^2\,x^2 + 2\,a_2\,l_2\,x + l_2^2 \\ \vdots \qquad & \qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Aus

$$[v\,v] = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,l]\,x + [l\,l] = \text{Min.}$$

erhält man die Normalgleichung

$$\frac{d[v\,v]}{dx} = 2\,[a\,a]\,x + 2\,[a\,l] = 0$$

und aus ihr den gesuchten Zuschlag

$$(27) \qquad x = -\frac{[a\,l]}{[a\,a]}, \quad \text{woraus} \quad X = N_X + x\,.$$

Die Gleichung (27) steht im Einklang mit Gleichung (7) $L = N + \frac{[\nu]}{n}$, wonach der gesuchte Zuschlag zum Näherungswert N war $x = \frac{[\nu]}{n}$. Denn die Koeffizienten a der Unbekannten in (27) waren dort alle $= 1$. Nur ist zu beachten, daß der zur Berechnung dieses gesuchten Zuschlages x dienende reduzierte Beobachtungswert dort hieß $\nu =$ Beobachtung — Näherung $= l - N$, während er jetzt heißt $l = F(N_X \ldots) - L$, d. h. Näherung — Beobachtung. Das Absolutglied l ist also jetzt mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeführt.

Auch die Gleichung (1) $[v] = 0$ findet mit

$$a_1 = a_2 = \cdots = 1$$

ihre Bestätigung:

Multiplizieren wir nämlich jede Fehlergleichung des gegenwärtigen Paragraphen mit ihrem Koeffizienten a, so erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1^2\,x + a_1\,l_1 &= a_1\,v_1 \\ a_2^2\,x + a_2\,l_2 &= a_2\,v_2 \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \end{aligned}$$

und durch vertikale Addition die linke Seite der Normalgleichung

$$(28) \qquad [a \qquad\qquad = [a\,v] = 0\,.$$

b) Beim Vorhandensein von **zwei Unbekannten** X und Y laute die Form der Beziehung zwischen ihnen und der Beobachtung L

$$F(X, Y) - L = 0,$$

woraus durch Einführung der Näherungswerte N_X und N_Y (so daß $X = N_X + x$, $Y = N_Y + y$) und der Bezeichnungen

$$a = \frac{\partial F}{\partial N_X}, \qquad b = \frac{\partial F}{\partial N_Y}, \qquad l = F(N_X, N_Y) - L$$

die Fehlergleichungen entstehen:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + l_2 &= v_2 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \end{aligned}$$

Aus ihnen ergeben sich durch partielle Differentiation des Ausdruckes für $[v v]$ die zwei Normalgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Zuschläge x und y:

$$\left\{ \begin{aligned} [a a]\, x + [a b]\, y + [a l] &= 0 \\ [a b]\, x + [b b]\, y + [b l] &= 0 \,. \end{aligned} \right.$$

Zum Zwecke der Reduktion der Zahl der Unbekannten um eine und Ausrechnung der anderen könnte man irgend eine der bekannten algebraischen Methoden anwenden. In Rücksicht auf möglichst bequeme, schematische Durchführung der Rechnung und unter Berücksichtigung der symmetrischen Anordnung der Koeffizienten von x und y (in der einen Diagonalen, von links oben nach rechts unten, stehen nur Quadratsummen, in der anderen identische Produktensummen) hat jedoch der Schöpfer der Methode der kleinsten Quadrate, **Gauß**, im Jahre 1810 einen vom üblichen etwas abweichenden Rechnungsweg gewiesen, dem wir folgen wollen. Hiernach wird grundsätzlich *zuerst die* links stehende Unbekannte eliminiert

und zu diesem Zwecke die mit $-\frac{\text{2 Koeffiz. der I}}{\text{1 Koeffiz. der I}}$
multiplizierte erste Gleichung zur unveränderten z
Gleichung addiert. Dabei ergibt sich als erste u
zige Reduktionsstufe

$$\left([b\,b]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right)y+\left([b\,l]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]\right)=($$

$$\text{woraus} \qquad y=-\frac{[b\,l]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]}{[b\,b]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]}\,.$$

Für die schwerfälligen Differenzausdrücke im
und im Nenner hat Gauß Symbole eingeführt,
durch die Ziffer 1 ausdrücken, daß es sich um Erze
der ersten Reduktionsstufe handelt. Jeder Ausdr
ersten Reduktionsstufe hat (vgl. obige Reduktior
als Nenner des Subtrahenden das Summenglied
also braucht das Symbol diesen Nenner nicht be
anzugeben. Der Zähler des Subtrahenden ist ein I
zweier Faktoren, deren jeder wieder die Summe vc
dukten je zweier Faktoren ist, von denen je (
heißt, während der andere je einer der Faktor
Minuenden ist. Es genügt daher zur eindeutig
zeichnung

$$(29)\left\{\begin{array}{ll} \text{des Zählers } & [b\,l]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \text{ das Symbol} \\ \text{„ Nenners } & [b\,b]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] \quad \text{„} \qquad \text{„} \\ \left.\begin{array}{l}\text{allgemein d.}\\ \text{Ausdruckes}\end{array}\right\} & [b\,s]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,s] \quad \text{„} \qquad \text{„} \end{array}\right.$$

usw.,

womit die obige Gleichung übergeht in

$$y = -\frac{[b\,l \cdot 1]}{[b\,b \cdot 1]} . \tag{30}$$

Um den Wert der links stehenden Unbekannten x zu berechnen, könnte man jetzt entweder den berechneten Wert der anderen in eine der Normalgleichungen einsetzen, oder statt der links stehenden jetzt die rechts stehende Unbekannte eliminieren. Damit würde aber der Schematismus in der Berechnung gestört, auf den man Wert zu legen hat, wenn es sich um häufig auftretende Rechenarbeiten handelt, deren mechanische Ausführung man untergeordneten Hilfskräften übertragen will. Der erstgenannte Weg der Einsetzung verhindert überdies die Berechnung des Gewichtes und mittleren Fehlers der zuletzt bestimmten Unbekannten, wie wir später sehen werden. Man zieht es daher vor, die Normalgleichungen so umzustellen, daß die Diagonale der Quadratsummen dieselbe Richtung hat wie zuerst, aber die bisher links stehende Unbekannte x nun rechts erscheint:

$$\begin{cases} [b\,b]\,y + [a\,b]\,x + [b\,l] = 0 \\ [a\,b]\,y + [a\,a]\,x + [a\,l] = 0 . \end{cases}$$

Jetzt ergibt sich der Wert von x genau auf demselben Wege, wie vorher derjenige von y.

Auch im Falle der Berechnung zweier Unbekannten erhält man ein Analogon zu Gleichung (1): Multipliziert man die

1. Fehlergl. mit a_1, so erhält man $a_1^2 x + a_1 b_1 y + a_1 l_1 = a_1 v_1$
2. " " a_2, " " " $a_2^2 x + a_2 b_2 y + a_2 l_2 = a_2 v_2$.

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Vertikale Addition ergibt die erste Normalgleichung:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = [a\,v] = 0 . \tag{31}$$

Durch Multiplikation der Fehlergleichungen mit $b_1, b_2 \ldots$ und vertikale Addition erhält man ebenso $[b v] = 0$ in Übereinstimmung mit Gleichungen (1) und (28), die nur spezielle Fälle des gegenwärtigen darstellen.

c) Auflösung der Normalgleichungen für drei und mehr Unbekannte.

Die Normalgleichungen für drei Unbekannte x, y, z sind in § 14 aufgestellt worden und lauten

$$\begin{cases} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0\,. \end{cases}$$

Gerade wie bei der Bestimmung zweier Unbekannten zeigt sich auch hier in der Anordnung der Koeffizienten eine bemerkenswerte Symmetrie. Die Diagonale durch die Koeffizienten von links oben nach rechts unten trifft die Quadratsummen. Zu beiden Seiten von ihr symmetrisch angeordnet sind identische Produktensummen. Die Entwicklung in § 14 läßt erkennen, daß dieselbe Symmetrie auch für $4, 5 \ldots \varkappa$ Unbekannte zutrifft. Wir verwenden daher in allen Fällen das dieser Eigentümlichkeit Rechnung tragende Gaußsche Reduktionsverfahren, mit Hilfe dessen wir grundsätzlich

in der 1. Reduktionsstufe die 1. Unbekannte links eliminieren,
" " 2. " " 2. " " "
" " 3. " " 3. " " "
⋮ ⋮

bis schließlich in der $(\varkappa - 1)$-ten Reduktionsstufe von den $\varkappa$ Unbekannten nur noch eine übrig ist.

Die Eliminierung der linksstehenden Unbekannten erfolgt allgemein in jeder Reduktionsstufe, indem wir zur

2. Normalgl. die mit	$\frac{\text{2. Koeff. der I. Reihe}}{\text{1. Koeff. der I. Reihe}}$	multipl.	1. Gl. addieren,
3. „ „ „	$\frac{\text{3. Koeff. der I. Reihe}}{\text{1. Koeff. der I. Reihe}}$	„	1. „ „
4. „ „ „	$\frac{\text{4. Koeff. der I. Reihe}}{\text{1. Koeff. der I. Reihe}}$	„	1. „ „
⋮			⋮

wodurch jede folgende Reduktionsstufe gegenüber der vorhergehenden eine Unbekannte und eine Gleichung verliert. Auf obige drei Gleichungen angewandt, ergibt dieses Verfahren unter Benutzung der Symbole (29) als erste Reduktionsstufe zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und derselben bemerkenswerten Symmetrie der Koeffizienten wie bisher:

$$\text{I. Reduktionsstufe} \left\{ \begin{array}{l} [bb\cdot 1]\,y + [bc\cdot 1]\,z + [bl\cdot 1] = 0 \\ [bc\cdot 1]\,y + [cc\cdot 1]\,z + [cl\cdot 1] = 0 \end{array} \right.$$

Wenden wir das Gaußsche Reduktionsverfahren jetzt auf die erste Reduktionsstufe an, und addieren die mit $-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$ multiplizierte erste Gleichung zur zweiten, so erhalten wir aus den obigen Gleichungen mit den Unbekannten y und z die zweite Reduktionsstufe:

$$[cl\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1] + z\left\{[cc\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1]\right\} = 0$$

und daraus die letzte, dritte Unbekannte:

$$z = -\frac{[cl\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]}{[cc\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1]}.$$

ein Ausdruck, so schwerfällig, wie der auf S. 80 für y erhaltene.

Für die zweite und (im Falle von mehr als drei Unbekannten) jede folgende Reduktionsstufe müssen wir daher zur Schreibvereinfachung die in (29) eingeführte Symbolik fortsetzen. An Stelle des Nenners $[a\,a]$ der ersten tritt für die zweite Reduktionsstufe der Nenner $[b\,b \cdot 1]$, und es bedeutet in ihr ganz analog wie in (29)

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &[c\,l \cdot 1] - \frac{[b\,c \cdot 1]}{[b\,b \cdot 1]}[b\,l \cdot 1] = [c\,l \cdot 2] \\ &[d\,f \cdot 1] - \frac{[b\,d \cdot 1]}{[b\,b \cdot 1]}[b\,f \cdot 1] = [d\,f \cdot 2] \end{aligned} \right\} \text{usw.,}$$

für die dritte Reduktionsstufe kommt der Nenner $[c\,c \cdot 2]$, und es bedeutet beispielsweise

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &[e\,f \cdot 2] - \frac{[c\,e \cdot 2]}{[c\,c \cdot 2]}[c\,f \cdot 2] = [e\,f \cdot 3] \\ &[f\,l \cdot 2] - \frac{[c\,f \cdot 2]}{[c\,c \cdot 2]}[c\,l \cdot 2] = [f\,l \cdot 3] \end{aligned} \right\} \text{usw.,}$$

für die vierte Reduktionsstufe kommt der Nenner $[d\,d \cdot 3]$, und es bedeutet

$$(29) \qquad [f\,l \cdot 3] - \frac{[d\,f \cdot 3]}{[d\,d \cdot 3]}[d\,l \cdot 3] = [f\,l \cdot 4] \quad \text{usw.,}$$

für die fünfte Reduktionsstufe kommt der Nenner $[e\,e \cdot 4]$, und es bedeutet u. a.

$$(29) \qquad [f\,l \cdot 4] - \frac{[e\,f \cdot 4]}{[e\,e \cdot 4]}[e\,l \cdot 4] = [f\,l \cdot 5]$$

usw. Damit geht der oben gefundene Ausdruck für z über in:

$$(32) \qquad z = -\frac{[c\,l \cdot 2]}{[c\,c \cdot 2]}.$$

Auch bei drei und mehr Unbekannten erhält man durch Multiplikation der Fehlergleichungen $1, 2 \ldots \lambda$ der Reihe nach mit $a_1, a_2 \ldots a_\lambda$, bzw. $b_1, b_2 \ldots b_\lambda$, bzw. $c_1, c_2 \ldots c_\lambda$, Addition der vertikalen Reihen und Vergleichung mit den Normalgleichungen:

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} [a\,a]x + [a\,b]y + [a\,c]z + [a\,l] &= \underline{[a\,v] = 0} \\ [a\,b]x + [b\,b]y + [b\,c]z + [b\,l] &= \underline{[b\,v] = 0} \\ [a\,c]x + [b\,c]y + [c\,c]z + [c\,l] &= \underline{[c\,v] = 0} \end{aligned} \right.$$

in Übereinstimmung mit Gleichungen (31) und (28).

Auf gleiche Weise bestimmen wir jetzt die bisher vorletzte Unbekannte y, nachdem wir die Normalgleichungen so umstellten, daß sie als letzte erscheint und die Quadratsummenkoeffizienten in derselben Diagonale von links oben nach rechts unten stehen wie folgt:

$$\begin{aligned} [c\,c]z + [a\,c]x + [b\,c]y + [c\,l] &= 0 \\ [a\,c]z + [a\,a]x + [a\,b]y + [a\,l] &= 0 \\ [b\,c]z + [a\,b]x + [b\,b]y + [b\,l] &= 0\,. \end{aligned}$$

Ist y bestimmt, so sorgen wir endlich durch abermalige Umstellung nach der vorgeführten Regel, daß die jetzt zu bestimmende Unbekannte x hinten steht. Die Anordnung der Gleichungen wird dann die folgende:

$$\begin{aligned} [b\,b]y + [b\,c]z + [a\,b]x + [b\,l] &= 0 \\ [b\,c]y + [c\,c]z + [a\,c]x + [c\,l] &= 0 \\ [a\,b]y + [a\,c]z + [a\,a]x + [a\,l] &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Arbeit der Reduktion und Auflösung der Gleichungen kann auf diese Weise völlig schematisch erfolgen.

Wir haben damit einen Weg der Auflösung gefunden, der *sich in ganz* gleicher Weise für beliebig viele Un-

bekannte anwenden läßt. Die Zahl der nötigen Reduktionsstufen ist dabei immer um eins kleiner als die Zahl der Unbekannten.

Das Ergebnis der Auflösung war für:

eine Unbekannte
$$\left\{ x = -\frac{[a\,l]}{[a\,a]}, \qquad [a\,v] = 0\,. \right\} \quad (27) \text{ u. } (28)$$

zwei Unbekannte
$$\left\{ y = -\frac{[b\,l \cdot 1]}{[b\,b \cdot 1]}, \qquad \begin{aligned}[a\,v] &= 0\\ [b\,v] &= 0\,,\end{aligned} \right\} \quad (30) \text{ u. } (31)$$

drei Unbekannte
$$\left\{ z = -\frac{[c\,l \cdot 2]}{[c\,c \cdot 2]}, \qquad \begin{aligned}[a\,v] &= 0\\ [b\,v] &= 0\\ [c\,v] &= 0\,.\end{aligned} \right\} \quad (32) \text{ u. } (33)$$

Die Fortsetzung des Verfahrens ergibt (was sich durch Analogieschluß voraussehen läßt) als Wert der letzten von:

vier Unbekannten
$$\left\{ x_4 = -\frac{[d\,l \cdot 3]}{[d\,d \cdot 3]}, \qquad \begin{aligned}[a\,v] &= 0\\ [b\,v] &= 0\\ [c\,v] &= 0\\ [d\,v] &= 0\,,\end{aligned} \right\} \quad (34) \text{ u. } (35)$$

fünf Unbekannten
$$\left\{ x_5 = -\frac{[e\,l \cdot 4]}{[e\,e \cdot 4]}, \qquad \begin{aligned}[a\,v] &= 0\\ &\;\vdots\\ [e\,v] &= 0\end{aligned} \right\} \quad (34) \text{ u. } (35)$$

usw.

§ 16. Bestimmung der mittleren Fehler m der Beobachtungswerte L aus den ihnen zuzuschlagenden Verbesserungen v.

Die ursprünglichen Beziehungen zwischen den Unbekannten X ... und den Beobachtungswerten $L_1 \ldots L_n$ hießen

$$(\ldots Y \ldots) - L_1 = 0\,.$$

Da die Beobachtungswerte L unmöglich fehlerfrei sein können, sahen wir uns genötigt, ihnen — zunächst noch unbekannte — Verbesserungsbeträge $+v$ zuzuschlagen, so daß wir uns mit den Gleichungen genügen lassen mußten:

$$(25\text{a}) \qquad \begin{cases} F_1(X, Y \ldots) - L_1 = v_1 , \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

womit die wahrscheinlichsten Werte der Beobachtungsgrößen lauteten

$$\begin{matrix} L_1 + v_1 . \\ \vdots \quad \vdots \end{matrix}$$

Wir haben sodann zum Zweck der Einführung linearer Form der Beziehungen die Unbekannten

$$\left.\begin{matrix} X \\ Y \\ \vdots \end{matrix}\right\} \text{ ersetzt durch } \begin{cases} N_X + x \\ N_Y + y \\ \vdots \end{cases}$$

wobei N_X, $N_Y \ldots$ Näherungswerte der Unbekannten und $x, y \ldots$ die jetzt als neue Unbekannte aufzufassenden kleinen Zuschläge zu diesen Näherungswerten darstellten. Die Fehlergleichungen gingen damit über in die Form:

$$(25\text{e}) \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + \cdots + l_1 = v_1 , \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

so daß an Stelle des negativen Wertes der Beobachtung L der Überschuß l desjenigen Wertes über ihn trat, den man durch Einsetzen der Näherungswerte N_X, $N_Y \ldots$ in die Beziehungen $F(X, Y)$ errechnete.

Der an der Beobachtungsgröße L anzubringende Verbesserungszuschlag $+v$ erlitt durch diese Additionalkonstante $F(N_X, N_Y \ldots)$ natürlich ebensowenig eine Änderung, als die der Beobachtung oder der gesuchten Größe $X \ldots$ (s. § 18) innewohnende Genauigkeit.

Die den Beobachtungswerten L zuzuschlagenden Verbesserungen v lassen sich nun nach erfolgter Ausrechnung der neuen Unbekannten x, $y \ldots$ oder der Unbekannten X, $Y \ldots$ aus Gleichung (25e) bzw. (25a)

berechnen. Je kleiner diese nötigen Verbesserungen sind, um so genauer ist die Beobachtung ausgeführt. Als Kriterium für die erreichte Beobachtungsgenauigkeit kann demnach die Größe dieser Verbesserungszuschläge v dienen. Dabei hat uns aber schon die bisherige Untersuchung gezeigt, daß nicht etwa der durchschnittliche Wert $d = \frac{[\text{absol. } v]}{n}$ dieser Verbesserungszuschläge einen zutreffenden Genauigkeitsmaßstab liefert, sondern daß wir, um größere Beobachtungsfehler stärker in die Wagschale zu werfen und gleichzeitig den störenden Vorzeichenunterschied wegzubringen, die Quadrate dieser Verbesserungen betrachten müssen. Wir verfahren dabei in Übereinstimmung mit der Bedingung $[v\,v] = \text{Min.}$, welche uns die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten lieferte. Denn es liegt nichts näher, als den Wert derjenigen Funktion der Beobachtungsfehler, welche wir durch entsprechende Auswahl der Unbekannten zum Min. machen wollen, gleichzeitig als Maßstab für die erreichte Beobachtungsgenauigkeit zu benutzen.

Ist nur eine einzige Unbekannte vorhanden, zu deren Bestimmung n Beobachtungswerte L dienen, so daß unsere Fehlergleichungen heißen

$$\begin{array}{c} a_1\,x + l_1 - v_1 = 0\,, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

so tritt $a\,x$ an Stelle von L in Gleichung (2), und wir haben wie dort nach Gleichung (5b) direkt den mittleren Fehler einer Beobachtung

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}\,.$$

Es fragt sich aber, ob der Nenner $(n-1)$ auch im Falle *der Bestimmung* von $2, 3 \ldots \varkappa$ Unbekannten aus

λ Beobachtungen bzw. λ unabhängigen Bestimmungsgleichungen gilt. Diese Frage läßt sich durch direkte Entwicklung, einfacher aber noch durch folgende Überlegung beantworten:

a) Welches auch die allgemeine Formel für die Berechnung des mittleren Fehlers m einer Beobachtung aus den Verbesserungen v sein möge, für den Fall der Bestimmung einer einzigen Unbekannten aus λ Beobachtungen heißt sie:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{\lambda - 1}. \tag{5 b}$$

b) Ist $\lambda < \varkappa$, so lassen sich aus den Gleichungen nicht einmal die Werte der $\varkappa$ Unbekannten, also noch viel weniger die bei der Beobachtung erreichte Genauigkeit errechnen. Die Einsetzung von λ und $\varkappa$ in die gesuchte Formel für m muß also zu einem imaginären Wert führen.

c) Ist $\lambda = \varkappa$, so lassen sich wohl die Werte der Unbekannten X, Y..., aber keine den Beobachtungswerten zuzuschlagenden Verbesserungen v berechnen. Die zwischen den Werten für die Unbekannten und den Beobachtungsgrößen bestehenden Beziehungen werden durch die Beobachtungswerte, so fehlerhaft sie sein mögen, genau erfüllt. Der mittlere Beobachtungsfehler m bleibt somit unbestimmt, was die für ihn aufzustellende Formel zum Ausdrucke bringen muß.

d) Ist $\lambda > \varkappa$, so ist für die Unbekannten Überbestimmung vorhanden, folglich gehen jetzt die Beziehungen (25) in die Fehlergleichungen (25 a) und (25 e) über. Letztere liefern λ, den Beobachtungswerten L zuzuschlagende Verbesserungen v, aus denen sich der mittlere Beobachtungsfehler m um so sicherer ergibt, je größer λ.

e) Der gesuchte Ausdruck für den mittleren Beobachtungsfehler m kann nach dem Vorstehenden nicht bloß abhängig sein von $[v v]$ und der Zahl λ von Bestimmungsgleichungen, sondern auch von der Zahl $\varkappa$ der Unbekannten, muß also lauten:

$$m = F([v v], \lambda, k).$$

f) Er darf nur für den Fall $m = 0$ ergeben, wenn die Beobachtungswerte fehlerfrei sind, $v_1 = v_2 = \cdots = 0$ (was bei wirklichen Beobachtungen nie zutrifft).

Alle diese Forderungen sind erfüllt durch die Gleichung:

$$m_L^2 = \frac{[v v]}{\lambda - \varkappa}. \tag{36}$$

Sie liefert:

a) für $\varkappa = 1$ $\quad m^2 = \frac{[v v]}{\lambda - 1}$;

b) für $\lambda < \varkappa$ $\quad m^2 = \frac{[v v]}{\text{negativ}} = \text{negativ}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{was auch } v \text{ sein möge,}\\ \text{folglich } m \text{ imaginär;}\end{array}\right.$

c) für $\lambda = \varkappa$ $\quad m^2 = \frac{[v v]}{0}$

$$= \frac{0}{0} = \text{unbestimmt (weil } v_1 = v_2 = \cdots = 0);$$

d) für $\lambda > \varkappa$ $\quad m^2 = \frac{[v v]}{> 1}$.

Je größer λ, um so größer auch die Zahl der zur Berechnung von m verwendeten v. Um so sicherer also die Bestimmung von m.

f) für $\lambda > \varkappa$ wird m nur $= 0$, wenn $[v v] = 0$, weil jeder Einzelbetrag v^2 eine endliche positive Größe darstellt, die mit $\lambda - \varkappa$ wächst.

§ 17. Ableitung des Wertes der Fehlerquadratsumme $[v v]$ als Nebenprodukt der Reduktion der Normalgleichungen.

Die Berechnung der zur Erkenntnis der Beobachtungsgenauigkeit nötigen Fehlerquadratsumme $[v v]$ durch Einsetzung der für die Unbekannten $x \ldots$ erhaltenen Werte in die Fehlergleichungen ist schwerfällig. Wir suchen daher auf anderem Wege zum Ziele zu gelangen. In § 14 haben wir für $[v v]$ beim Vorhandensein von drei Unbekannten die Gleichung aufgestellt:

$$[v v] = [a a] x^2 + 2 [a b] x y + 2 [a c] x z + 2 [a l] x + [b b] y^2 \\ + 2 [b c] y z + 2 [b l] y + [c c] z^2 + 2 [c l] z + [l l] ,$$

welche für jede beliebige andere Zahl von Unbekannten ganz analog lautet (vgl. z. B. § 15 für eine Unbekannte). Aus obiger Gleichung wollen wir nun versuchen, die Unbekannten x, y, z zu eliminieren. Zu diesem Zwecke kehren wir zur Auflösung der Normalgleichungen zurück (S. 82), deren erste wir — quadriert und durch $[a a]$ dividiert — von dem obigen Ausdruck für $[vv]$ subtrahieren. Unter gleichzeitiger Einsetzung der Gaußschen Symbole erhalten wir dann:

$$[v v] = [b b \cdot 1] y^2 + 2 [b c \cdot 1] y z + 2 [b l \cdot 1] y + [c c \cdot 1] z^2 \\ + 2 [c l \cdot 1] z + [l l \cdot 1] .$$

Subtrahieren wir von dem jetzt gewonnenen Ausdrucke für $[v v]$ die linke Seite der quadrierten und mit $[b b \cdot 1]$ durchdividierten ersten Gleichung der ersten Reduktionsstufe (s. S. 83), so erhalten wir unter wiederholter Anwendung der Gaußschen Symbolik

$$[v v] = [c c \cdot 2] z^2 + 2 [c l \cdot 2] z + [l l \cdot 2] .$$

Subtrahieren wir endlich von dem obigen Ausdrucke für $[vv]$ die linke Seite der quadrierten und durch $[c c \cdot 2]$

dividierten Gleichung der zweiten Reduktionsstufe $[cc \cdot 2]z + [cl \cdot 2] = 0$, so erhalten wir als Quadratsumme der Verbesserungen der Beobachtungen im Falle von drei Unbekannten:

$$(37) \qquad [vv] = [ll \cdot 3] \,.$$

Im Falle der Bestimmung von $\varkappa$ Unbekannten ergibt sich genau auf demselben Wege:

$$(37) \qquad [vv] = [ll \cdot \varkappa] \,.$$

So liefert z. B. die Bestimmung einer einzigen Unbekannten

$$[vv] = [aa]x^2 + 2[al]x + [ll] \,.$$

Setzt man nach (27)

$$x = -\frac{[al]}{[aa]}, \qquad x^2 = \cdot\frac{[al]^2}{[aa]^2},$$

so kommt

$$(37) \qquad [vv] = \frac{[al]^2}{[aa]} - 2\frac{[al]^2}{[aa]} + [ll] = [ll] - \frac{[al]}{[aa]}[al] = [ll \cdot 1] \,.$$

Erwägt man,

daß aus: $[ll]$ sich ergibt $[ll \cdot 1] = [ll] - \frac{[al]}{[aa]}[al]$

„ „ $[ll \cdot 1]$ „ „ $[ll \cdot 2] = [ll \cdot 1] - \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bl \cdot 1]$

„ „ $[ll \cdot 2]$ „ „ $[ll \cdot 3] = [ll \cdot 2] - \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}[cl \cdot 2]$,

so wird klar, daß man die Quadratsumme der Verbesserungen v gelegentlich der Reduktion der Normalgleichungen in demselben Augenblick erhält, in welchem die zuletzt stehende, also zuerst gesuchte Unbekannte gefunden wird. Man hat zu diesem Zwecke außer den Koeffizienten $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$, $[al]$ nur noch die Quadratsumme $[ll]$ einzuführen und bei der Reduktion ebenso zu behandeln, wie jene.

Da die Beobachtungsverbesserung v, also auch $[vv]$ ihren Wert nicht ändert, wenn man statt der zuletzt stehenden nach erfolgter Umstellung die vorher zweitletzte Unbekannte usw. bestimmt, so erhält man dadurch eine Rechenprobe für die richtige Durchführung der ganzen Reduktionsarbeit, daß die Endwerte $[ll \cdot x]$ der Reduktion für alle Unbekannte einander gleich sein müssen.

§ 18. Mittlerer Fehler M und Gewicht P der berechneten Unbekannten aus den Verbesserungszuschlägen v der Beobachtungswerte L.

Von den gesuchten Größen X, Y . . . [illegible]
dieselbe Genauigkeit wie die [illegible]
Subtraktion des Näherungswertes [illegible]
entstandene neue Unbekannte x, y . . . [illegible]
derselben unbekannten Verbesserung [illegible]
lichen wahren Wert bzw. Zuschlag [illegible]
beide haben denselben mittleren Fehler [illegible]

Dieser mittlere Fehler M hängt [illegible]
leren Fehler m, oder der wahren [illegible]
rungen v der Beobachtungswerte [illegible]
diese (und je größer ihre Zahl [illegible]
sich auch die gesuchten Größen [illegible]
sie vermitteln [illegible]
Gleichung (36) [illegible]
die — im vorliegenden Fall [illegible]
Fehler m der Beobachtung [illegible]
uns § 12 die Möglichkeit [illegible]
ten Zuschläge x, [illegible]
zu finden. [illegible]
chungen

[illegible]

dividierten Gleich
$[cc \cdot 2]z + [cl \cdot 2]$
summe der Verbess
von drei Unbekan
(37)

Im Falle der B
sich genau auf den
(37)

So liefert z. B.
bekannten

$[vv] =$

Setzt man nach (27

$x =$

so kommt

(37) $[vv] = \frac{[al]^2}{[aa]}$

Erwägt man,

daß aus: $[ll]$

" " $[ll \cdot 1]$

" " $[ll \cdot 2]$

so wird klar,
rungen v gel
gleichunge
die zuletzt
gefunden wi
Koeffiziente
summe $[ll]$
zu behandel

[illegible]rechnung [illegible]

[P]raktische Anwendung [illegible] für [illegible]malgleichungen. [illegible] bekannten [illegible] Schreib[illegible]

[§] 14 haben [illegible] ngen [illegible] tungs[illegible] ergle[illegible]

ihnen [illegible]

daran [illegible]

K[illegible]

[illegible] Rechenstab, für größere Genauigkeit [illegible]ntafeln, oder größere [illegible] walzen und, falls auch [illegible] Logarithmentafeln bzw. [illegible] die einzelnen Koeffiz[illegible] ... *l* sehr [illegible] besonders klein[illegible] den großen [illegible] sollen zum [illegible]

recht. Ausgleichungsrech[illegible]

explizite Funktionen für die Unbekannten zu bilde der Form $X = F(L_1, L_2 \ldots)$, oder $x = \varphi(l_1, l_2$ oder

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n ; \\ y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots + \beta_n l_n . \end{cases}$$

Dabei steht von vornherein fest, daß die zu bestimm Koeffizienten

$$\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2 \ldots \\ \beta_1, \beta_2 \ldots \end{matrix}$$

Funktionen der Koeffizienten $a, b \ldots$ der Fehle chungen sind.

Zur Umwandlung der Normalgleichungen in ex Form für die Unbekannten nehmen wir den Fall zwei bekannten, für welchen Gleichung (30) lieferte:

$$y = -\frac{[b\,l \cdot 1]}{[b\,b \cdot 1]} .$$

Der Nenner ist unabhängig von l, kommt also für d wünschte auseinandergezogene Form (a) nicht weiter i tracht. Der Zähler lautet auseinandergezogen

$$\begin{aligned} [b\,l \cdot 1] &= [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \\ &= b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots + b_n l_n - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + \end{aligned}$$

woraus wir erhalten

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{1}{[b\,b \cdot 1]}\left\{\left(b_1 - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right) l_1 + \left(b_2 - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right) l_2 \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \left(b_n - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}a_n\right) l \end{cases}$$

Die Vergleichung der Gleichungen (a) und (b) liefert

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} \beta_1 = -\dfrac{1}{[b\,b \cdot 1]}\left(b_1 - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right), \\ \beta_2 = -\dfrac{1}{[b\,b \cdot 1]}\left(b_2 - \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right), \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

und mit diesen Koeffizienten die Möglichkeit der V[illegible] der Unbekannten y nach Gleichung [illegible] zu berechnen. [illegible] haben wir nun kein Interesse, wohl aber an der Berechnung von

$$\left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right], \qquad \left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right],$$

weil nach Gleichungen [illegible] und [illegible]

$$M_y^2 = m^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{\mu^2}\, m^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]$$

Setzen wir den allen Beobachtungswerten gemeinschaftlichen mittleren Beobachtungsfehler m gleichzeitig als mittleren Fehler μ der Gewichtseinheit fest, [illegible] die Beobachtungen mit dem Gewicht [illegible] an, kommt daraus

$$\text{(d)} \qquad M_y^2 = m^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]$$

$$\text{(e)} \qquad \frac{1}{P_y} = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right].$$

Wir erhalten nun aus Gleichung [illegible] und [illegible]

$$\frac{\partial y}{\partial l_1} = \beta_1 = -\frac{1}{[b\,b\cdot 1]}\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial l_2} = \beta_2 = -\frac{1}{[b\,b\cdot 1]}\left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_2\right) \quad \text{usw.}$$

also

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l_1}\right)^2 = \frac{1}{[b\,b\cdot 1]^2}\left(b_1^2 - 2\,a_1\,b_1\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + a_1^2\,\frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l_2}\right)^2 = \frac{1}{[b\,b\cdot 1]^2}\left(b_2^2 - 2\,a_2\,b_2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + a_2^2\,\frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right] = \frac{1}{[b\,b\cdot 1]^2}\left([b^2] - 2\,\frac{[a\,b]^2}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}\right)$$

$$= \frac{1}{[b\,b\cdot 1]^2}\left([b\,b] - \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}\right) = \frac{1}{[b\,b\cdot 1]}.$$

Einsetzung in (d) und (e) und in Gleichung (36) h den Fall der Bestimmung von zwei Unbekannten:

$$(38)\quad M_y^2 = \frac{m^2}{[bb \cdot 1]} = \frac{[vv]}{(\lambda - 2)\,[bb \cdot 1]} = \frac{(ll \cdot}{(\lambda - 2)\,[}$$

$$(39)\quad P_y = \frac{1}{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]} = [bb \cdot 1]\,.$$

Der Ausdruck $[bb \cdot 1]$ für das Gewicht der bekannten y ist [in Übereinstimmung mit Gleichung der Nenner des zur Bestimmung dieser bekannten dienenden Bruchs. Er ergibt sich geleg lich der Reduktion der Normalgleichungen.

Durch Analogieschluß, oder durch Überlegungen und leitungen, ähnlich den vorhergehenden, kommt man zum wicht P und zum mittleren Fehler M der bei der Reduktion Normalgleichungen jeweils zu hinterst stehenden Unbekannt gleichgültig, wie groß ihre Zahl auch sei.

Z. B. liefert Gleichung (32) für drei Unbekannte

$$(39)\qquad P_{x_3} = [cc \cdot 2]\,,$$

woraus

$$(38)\quad M_{x_3}^2 = \frac{m_L^2}{P_{x_3}} = \frac{[vv]}{(\lambda - 3)\,[cc \cdot 2]} = \frac{[ll \cdot 3]}{(\lambda - 3)\,[cc \cdot 2}$$

Gleichung (34) für vier Unbekannte

$$(39)\qquad P_{x_4} = [dd \cdot 3]\,,$$

woraus

$$(38)\quad M_{x_4}^2 = \frac{m_L^2}{P_{x_4}} = \frac{[vv]}{(\lambda - 4)\,[dd \cdot 3]} = \frac{[ll \cdot 4]}{(\lambda - 4)\,[dd \cdot 3}$$

usw.

§ 19. Praktische Ausrechnung der Koeffizienten für die Normalgleichungen. Bedürfnis veränderter Größe der Unbekannten, oder der Maßeinheit. Vereinfachte Schreibweise. Rechnungsproben.

In § 14 haben wir erfahren, wie wir aus den vorhandenen Beziehungen zwischen den Unbekannten $X, Y \ldots$ und den Beobachtungsgrößen L von der Form (25) $F(X, Y \ldots) - L = 0$ die Fehlergleichungen

$$(25e) \qquad \begin{cases} a x + b y + \cdots + l = v \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

und aus ihnen die Normalgleichungen

$$(26) \qquad \begin{cases} [a a] x + [a b] y + \cdots + [a l] = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

erhalten.

Die darauf folgenden Paragraphen haben uns die Auflösung dieser Normalgleichungen gezeigt. Jetzt handelt es sich um die praktische Ausführung der Rechnung.

Die Koeffizienten $a, b \ldots$ der Fehlergleichungen mögen bereits gewonnen sein. Diejenigen der Normalgleichungen sind zu berechnen. Sie sind teils Quadratsummen $[a a]$, $[b b] \ldots [l l]$, teils Produktensummen $[a b]$, $[a c] \ldots [b c] \ldots$. Für die Bildung der einzelnen Quadrate und Produkte, wie für die Reduktion der Normalgleichungen verwendet man, soweit die Genauigkeit von drei Stellen ausreicht, den gewöhnlichen logarithmischen Rechenstab, für größere Genauigkeit Quadrat- bzw. Produktentafeln, oder größere Rechenschieber bzw. Rechenwalzen, und, falls auch deren Stellenzahl nicht ausreicht, Logarithmentafeln bzw. Rechenmaschinen.

Sind die einzelnen Koeffizienten und Absolutglieder $a, b, \ldots l$ sehr ungleich, so nötigt das Vorhandensein besonders kleiner Werte (< 1), wenn sie neben den großen überhaupt noch zum Ausdruck kommen sollen, zum Mitschleppen vieler Stellen, zumal

in den quadratischen Summen. Dadurch wird die p
tische Rechnung erheblich erschwert. Eine Ver
fachung ergibt sich, wenn es gelingt, den Koe
zienten und Absolutgliedern ungefähr glei
Stellenzahl zu verschaffen. Hierfür gibt es
Wege. Bei dem einen führen wir statt der Unbekan
mit den abnorm kleinen oder großen Koeffizienten in
Fehlergleichungen ihren 10-ten, 100-ten ... Teil
ihr 10-faches, 100-faches ... als neue Unbekannte
wodurch die zugehörigen Koeffizienten auf den 10-fac
100-fachen ... Betrag steigen, bzw. auf den 10-
100-ten Teil ermäßigt werden. Bei Begehung des an
wählen wir die Maßeinheiten für die Unbekannten
die Beobachtungsgrößen nach Bedarf in Abweichung
den bisher eingeführten. (Längen in m oder dm
cm usw., Winkel in Minuten oder Sekunden oder in
lytischem Maß, Gewichte in kg oder g usw., jedoch
sequent in einer und derselben Aufgabe immer gle

Die schon in § 15 erkannte symmetrische Anordn
gleicher Koeffizienten der Normalgleichungen, welch
einem eigentümlichen Reduktions- und Auflösungs
fahren führte, ermöglicht uns auch eine einfachere,
gekürzte Schreibweise. Betrachten wir z. B.
Normalgleichungen für vier Unbekannte:

$$[a\,a]\,x_1 + [a\,b]\,x_2 + [a\,c]\,x_3 + [a\,d]\,x_4 + [a\,l] = 0$$

$$[a\,b]\,x_1 + [b\,b]\,x_2 + [b\,c]\,x_3 + [b\,d]\,x_4 + [b\,l] = 0$$

$$[a\,c]\,x_1 + [b\,c]\,x_2 + [c\,c]\,x_3 + [c\,d]\,x_4 + [c\,l] = 0$$

$$[a\,d]\,x_1 + [b\,d]\,x_2 + [c\,d]\,x_3 + [d\,d]\,x_4 + [d\,l] = 0\,,$$

so erkennen wir, daß wir genau dieselben Koeffizient
derselben Reihenfolge erhalten, wenn wir statt de

chungen selbst jede Zeile zunächst vertikal von oben nach unten bis zur Diagonale der Quadratsummen und dann von ihr ab nach rechts horizontal weiter lesen. Unter dieser Voraussetzung können wir also den Aufschrieb der Glieder links von der Quadratsummendiagonale sparen; daß sie gemacht ist, deuten wir durch Unterstreichen des ersten (quadratischen) Koeffizienten auf jeder Zeile und eventuell durch Punkte an. Den Anschrieb $x, y \dots$ der Unbekannten müssen wir in diesem Fall sparen, weil er, solange wir in vertikaler Richtung lesen, nicht richtig wäre.

Abgekürzter Anschrieb der Koeffizienten der Normalgleichungen					
	$\underline{[a\,a]}$	$[a\,b]$	$[a\,c]$	$[a\,d]$	$[a\,l]$
	.	$\underline{[b\,b]}$	$[b\,c]$	$[b\,d]$	$[b\,l]$
	.	.	$\underline{[c\,c]}$	$[c\,d]$	$[c\,l]$
	.	.	.	$\underline{[d\,d]}$	$[d\,l]$

Genau dieselben Schreibkürzungen wenden wir bei jeder Reduktionsstufe an.

Ein wichtiges Erfordernis für die stufenweise Ausführung längerer Rechnungen, von denen sich eine auf der anderen aufbaut, ist die Herstellung von Rechenproben. Die bloße Wiederholung der Rechnung genügt hierfür nicht.

Eine durchgreifende Probe für die Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen, wie auch für deren Reduktion erhält man durch Einführung der Summe s der Zahlenwerte der Koeffizienten und Absolutglieder jeder Fehlergleichung:

$$(40)\qquad \begin{cases} s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \cdots + l_1 \\ s_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \cdots + l_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Multipliziert man nämlich die erste Zeile dieser Summengleichung (40) mit a_1, die zweite mit a_2 usw. und addiert vertikal, so erhält man die Kontrollgleichung

$$(41) \qquad [a\,s] = [a\,a] + [a\,b] + [a\,c] + \cdots + [a\,l]\,.$$

Führt man dieselbe Multiplikation mit

$$\begin{matrix} b_1\,, & b_2 \ldots \\ \vdots & \\ l_1\,, & l_2 \ldots \\ s_1\,, & s_2 \ldots \end{matrix}$$

durch und addiert, so erhält man

$$(41) \quad \begin{cases} [b\,s] = [a\,b] + [b\,b] + [b\,c] + \cdots + [b\,l] \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ [l\,s] = [a\,l] + [b\,l] + [c\,l] + \cdots + [l\,l] \\ [s\,s] = [a\,s] + [b\,s] + [c\,s] + \cdots + [l\,s] \end{cases}$$

Rechnet man also außer den zur Gewinnung der Unbekannten jedenfalls erforderlichen Produktsummen

$$\begin{matrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] & \ldots & [a\,l] \\ & [b\,b] & [b\,c] & \ldots & [b\,l] \\ & & \cdot & & \vdots \end{matrix}$$

noch die Produktensummen

$$\begin{matrix} [a\,s] \\ [b\,s] \\ \vdots \\ [l\,s] \end{matrix}$$

so ist nach Gleichung (41) durch jede dieser letzteren eine Zeile der Koeffizienten der Normalgleichungen summarisch geprüft. Die Quadratsumme $[l\,l]$, welche zum Zweck der Ableitung von $[v\,v]$ nach Gleichung (36) berechnet werden muß, wird durch die vorletzte der Kontrollgleichungen (41), und sämtliche Koeffizienten der

Normalgleichungen einschließlich der Kontrollproduktensummen $[a s] \ldots [l s]$ werden durch $[s s]$ geprüft.

Will man daher auf die zeilenweise Kontrolle verzichten, so genügt nach (41), letzte Gleichung als **einzige** summarisch durchgreifende Probe die Berechnung von

$$[s s] = [a a] + [a b] + \cdots + [b b] + [b c] + \cdots + [c l] + [l l]$$

(s. schematische Darstellung unten, in welcher jede Zeile rechts und links des Vertikalstrichs und die beiden durch fetten Druck hervorgehobenen Flächen je gleiche Wertsummen beherbergen).

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc|c} \multicolumn{5}{c|}{\text{Koeffiz. der Normalgleichungen}} & \text{Probe} \\ \mathbf{[a a]} & \mathbf{[a b]} & \mathbf{[a c]} & \ldots & \mathbf{[a l]} & [a s] \\ \mathbf{[a b]} & \mathbf{[b b]} & \mathbf{[b c]} & \ldots & \mathbf{[b l]} & [b s] \\ \mathbf{[a c]} & \mathbf{[b c]} & \mathbf{[c c]} & \ldots & \mathbf{[c l]} & [c s] \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{[a l]} & \mathbf{[b l]} & \mathbf{[c l]} & \ldots & \mathbf{[l l]} & [l s] \\ \hline [as] & [bs] & [cs] & \ldots & [ls] & \mathbf{[s s]} \end{array} \right.$$

oder abgekürzt geschrieben

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc|c} & & & & & \text{Probe} \\ \underline{[a a]} & [a b] & [a c] & \ldots & [a l] & [a s] \\ . & \underline{[b b]} & [b c] & \ldots & [b l] & [b s] \\ . & . & \underline{[c c]} & \ldots & [c l] & [c s] \\ & & & & \vdots & \\ . & . & . & . & \underline{[l l]} & [l s] \\ \hline . & . & . & . & . & \underline{[s s]} \end{array} \right.$$

Bei der Reduktion der Normalgleichungen zum Zwecke der Gewinnung von $x_1, x_2 \ldots$ spielen diese Unbekannten nur die passive Rolle, daß in jeder neuen Reduktionsstufe *eine von ihnen*, nämlich die in der vorhergehenden Stufe

links aufgeführte, verschwindet. Man kann daher den Anschrieb der Unbekannten selbst füglich unterlassen, geändert werden durch die Reduktion nur die Koeffizienten $[aa]$, $[ab]$ usw. Dehnt man die Reduktionsarbeit auch auf die Summenglieder $[as]$, $[bs]$ ... der Kontrollgleichungen (41) aus, so ändert sich dadurch an den zur Berechnung der Unbekannten dienenden Koeffizienten der verschiedenen Reduktionsstufe n natürlich nicht das geringste.

Man erhält aber auch für sie Kontrollgleichungen:

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l|l} [bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+\cdots+[bl\cdot 1] & -[bs\cdot 1]=0 \\ [bc\cdot 1]+[cc\cdot 1]+\cdots+[cl\cdot 1] & -[cs\cdot 1]=0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ [bl\cdot 1]+[cl\cdot 1]+\cdots+[ll\cdot 1] & -[ls\cdot 1]=0 \\ \hline -[bs\cdot 1]-[cs\cdot 1]-\cdots-[ls\cdot 1] & +[ss\cdot 1]=0 \end{array}\right.$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{cccc|c} & & & & \text{Probe} \\ \underline{[bb\cdot 1]} & [bc\cdot 1] & \cdots & [bl\cdot 1] & [bs\cdot 1] \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \underline{[ll\cdot 1]} & [ls\cdot 1] \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{[ss\cdot 1]} \end{array}\right.$$

d. h. dieselbe zeilenweise und Gesamtsummenprobe, wie in Gleichung (41) für die Koeffizienten der Normalgleichungen.

Die Fortsetzung der Reduktion liefert die Koeffizienten der zweiten Reduktionstufe, welche den Kontroll*gleichungen* genügen müssen:

$$
(43)\quad \left\{\begin{array}{ccc|c}
[cc\cdot 2] + \cdots + [cl\cdot 2] & & & -[cs\cdot 2] = 0 \\
\vdots & & & \vdots \\
[cl\cdot 2] + \cdots + [ll\cdot 2] & & & -[ls\cdot 2] = 0 \\
\hline
-[cs\cdot 2] - \cdots - [ls\cdot 2] & & & +[ss\cdot 2] = 0
\end{array}\right.
$$

oder abgekürzt geschrieben

$$
(43)\quad \left\{\begin{array}{ccc|c}
 & & & \text{Probe} \\
\underline{[cc\cdot 2]} & \cdots & [cl\cdot 2] & [cs\cdot 2] \\
\cdot & & \vdots & \\
\cdot & \cdot & \underline{[ll\cdot 2]} & [ls\cdot 2] \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \underline{[ss\cdot 2]}
\end{array}\right.
$$

Ist die Zahl der Unbekannten $= 3$, so fallen die obigen, weitere Glieder andeutenden Vorzeichen und Punkte weg, und es ergibt sich die bei der Reduktion noch übrig gebliebene rechtsstehende Unbekannte

$$z = -\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\,.$$

Die Fortsetzung der Reduktion liefert dann als dritte Reduktionsstufe, welche keine Unbekannte mehr enthält:

$$
(44)\quad \left\{\begin{array}{l}
[ll\cdot 3] - [ls\cdot 3] = 0 \\
-[ls\cdot 3] + [ss\cdot 3] = 0\,,
\end{array}\right.
$$

oder als Haupt- und Schlußprobe in Verbindung mit (37)

$$(44)\quad [ll\cdot 3] = [ls\cdot 3] = [ss\cdot 3] = [vv]$$

drei absolut gleich große Zahlen, deren Wert die Fehlerquadratsumme $[vv]$ vorstellt.

Ist die Zahl der Unbekannten $= \varkappa$, so liefert die $\varkappa$-te Reduktionsstufe

$$[ll\cdot\varkappa] = [ls\cdot\varkappa] = [ss\cdot\varkappa] = [vv]\,.$$

Zahlenbeispiel (für von Haus aus lineare Funktion zwischen den Unbekannten und den Beobachtungsgrößen).

Zur Bestimmung der Richtungsunterschiede zwischen vier von einem Punkte O ausgehenden Strahlen OA, OB, OC, OD wurden sämtliche zwölf, zwischen je zweien von ihnen vorhandene Winkel je mit gleicher Genauigkeit gemessen (Winkelmessung in allen Kombinationen) und zwar:

1.	$AOB = 106^0\,52'\,43''$	n. T.	7.	$BOD = 178^0\,74'\,13''$	n. T.
2.	$BOC = 99^0\,78'\,12''$	„ „	8.	$BOA = 293^0\,47'\,50''$	„ „
3.	$COD = 78^0\,95'\,97''$	„ „	9.	$COA = 193^0\,69'\,29''$	„ „
4.	$DOA = 114^0\,73'\,35''$	„ „	10.	$COB = 300^0\,21'\,78''$	„ „
5.	$AOC = 206^0\,30'\,68''$	„ „	11.	$DOB = 221^0\,25'\,90''$	„ „
6.	$AOD = 285^0\,26'\,60''$	„ „	12.	$DOC = 321^0\,05'\,00''$	„ „

Lösung: Zur gegenseitigen Festlegung von vier Strahlen genügen drei voneinander unabhängige Winkel. Die Zahl der überschüssigen Stücke ist also $12 - 3 = 9$, die Zahl der Fehlergleichungen 12, die Zahl der Unbekannten 3.

Die gesuchten („Soll“-) Werte für die Richtungsunterschiede mögen sein:

$$\text{Winkel } AOB = X\,,$$
$$\text{„} \quad BOC = Y\,,$$
$$\text{„} \quad COD = Z\,.$$

In § 14 haben wir für die zwischen den Unbekannten und den Beobachtungsgrößen L bestehenden Beziehungen allgemein folgende Normalform gewählt:

$$F(X,\,Y,\,Z) - L = 0\,. \tag{25}$$

Diese Normalform ging durch Einführung von Näherungswerten N_X, N_Y, N_Z für die Unbekannten und unter Beachtung, daß die Beobachtungswerte L nicht fehlerfrei sind, sondern Verbesserungszuschläge v verlangen, in die Form der Fehlergleichungen über:

$$a\,x + b\,y + c\,z + l = v\,. \tag{25e}$$

Da allgemein die Funktion $F(X, Y, Z)$ lediglich den Sollwert der betreffenden Beobachtungsgröße L darstellt, so ist im gegenwärtigen Beispiele die dem jeweiligen Beobachtungswert L entsprechende Funktion F der Unbekannten einfach durch sinngemäße Addition, bzw. Subtraktion der letzteren zu gewinnen, und es ergeben sich die Fehlergleichungen nach der Regel:

$$\text{Soll} - \text{Ist} = \text{Verbesserung}.$$

Im Interesse bequemer Rechnung [also nicht, wie im Falle nicht linearer Funktion, zur Linearmachung der Beziehungen (25)] führen wir auch hier Näherungswerte für die Unbekannten ein und setzen:

$$AOB = X = N_X + x = 106^\circ\, 52'\, 43'' + x \;,$$
$$BOC = Y = N_Y + y = 99^\circ\, 78'\, 12'' + y \;,$$
$$COD = Z = N_Z + z = 78^\circ\, 95'\, 97'' + z \;.$$

Damit erhalten wir durch Subtraktion jedes gemessenen Winkelwertes je von dem durch entsprechende Zusammensetzung der Unbekannten gewonnenen Sollwerte die 12 Fehlergleichungen:

1.	$x + 0 = v_1$	7.	$+y + z - 4'' = v_7$
2.	$y + 0 = v_2$	8.	$-x + 7'' = v_8$
3.	$z + 0 = v_3$	9.	$-x - y + 16'' = v_9$
4.	$-x - y - z + 13'' = v_4$	10.	$-y + 10'' = v_{10}$
5.	$+x + y - 13'' = v_5$	11.	$-y - z + 1'' = v_{11}$
6.	$+x + y + z - 8'' = v_6$	12.	$-z + 3'' = v_{12}$

Die Koeffizienten der Unbekannten sind demnach alle $= 1$ oder 0. Zur bequemeren Rechnung ist es wünschenswert, daß auch die Absolutglieder l möglichst nahe dem Werte 1 liegen. Dies wird erreicht, wenn man als Einheit **sowohl für die Absolutglieder l, als auch für die unbekannten *Zuschläge x, y, z* statt der Sekunden Dekasekunden (Zehnersekunden) *wählt.*** Damit erhält man tabellarisch angeordnet ***folgende Koeffizienten*** der Fehler- und der Normalgleichungen

Fehler-Gleichung	a	b	c	l	s	aa +	ab +	ac +	al −	as +	bb +	bc +	bl −	bs +	cc +	cl −	cs +	ll +	ls −	ss +
1	+1	0	0	0	+1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
4	−1	−1	−1	+1,3	−1,7	1	1	1	1,3	1,7	1	1	1,3	1,7	1	1,3	1,7	1,69	2,21	2,89
5	+1	+1	0	−1,3	+0,7	1	1	0	1,3	0,7	1	0	1,3	0,7	0	0	0	1,69	0,91	0,49
6	+1	+1	+1	−0,8	+2,2	1	1	1	0,8	2,2	1	1	0,8	2,2	1	0,8	2,2	0,64	1,76	4,84
7	0	+1	+1	−0,4	+1,6	0	0	0	0	0	1	1	0,4	1,6	1	0,4	1,6	0,16	0,64	2,56
8	−1	0	0	+0,7	−0,3	1	0	0	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0,49	0,21	0,09
9	−1	−1	0	+1,6	−0,4	1	1	0	1,6	0,4	1	0	1,6	0,4	0	0	0	2,56	0,64	0,16
10	0	−1	0	+1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
11	0	−1	−1	+0,1	−1,9	0	0	0	0	0	1	1	0,1	1,9	1	0,1	1,9	0,01	0,19	3,61
12	0	0	−1	+0,3	−0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,3	0,7	0,09	0,21	0,49
[ ] =	0	0	0	+2,5	+2,5	6	4	2	5,7	6,3	8	4	6,5	9,5	6	2,9	9,1	8,33	6,77	18,13

Ausrechnung mittels Rechenschiebers:

Koeffiz. der Normalgleichungen u.				Reduktion	Probe
+6	**+4**	**+2**	**−5,7**	**+ 6,3**	+ 6,3
	(−2⅔)	(−1⅓)	(+3,8)	(− 4,2)	
.	**+8**	**+4**	**−6,5**	**+ 9,5**	+ 9,5
		(−⅔)	(+1,9)	(− 2,1)	
.	.	**+6**	**−2,9**	**+ 9,1**	+ 9,1
			(−5,42)	(+ 5,98)	
.	.	.	**+8,33**	**− 6,77**	− 6,77
				(− 6,62)	
.	.	.	.	**+18,13**	+18,13

1. Reduktionsstufe u.			Reduktion	Probe
+5⅓	**+2⅔**	**−2,7**	**+ 5,3**	+ 5,3
	(−1⅓)	(+1,35)	(− 2,65)	
.	**+5⅓**	**−1,0**	**+ 7,0**	+ 7,0
		(−1,37)	(+ 2,68)	
.	.	**+2,91**	**− 0,79**	− 0,79
			(− 5,27)	
.	.	.	**+11.51**	+11,51

2. Reduktionsstufe u.		Reduktion	Probe
+4	**+0,35**	**+4,35**	+4,35
	(−0,02)	(−0,38)	
.	**+1,54**	**+1,89**	+1,89
		(−4,74)	
.	.	**+6,24**	+6,24

Hieraus

$$z = -\frac{[c\,l\cdot 2]}{[c\,c\cdot 2]} = -\frac{0{,}35}{4} = -0{,}09 \text{ Dekasekd.} = -0{,}9''$$

$$Z = 78^0\,95'\,97'' - 0{,}9'' = 78^0\,95'\,96{,}1''$$

$$P_z = [c\,c\cdot 2] = 4\,.$$

3. Reduktionsstufe u. Schlußprobe. $[v\,v]$.	
+1,52	**+1,51**
.	**+1,50** .

Mittlerer Fehler einer Messung

$$m = \pm\sqrt{\frac{1{,}51}{9}} = \pm 0{,}41 \text{ Dekasekd.} = \pm 4{,}1'',$$

mittlerer Fehler des Winkels Z

$$M_z = \frac{m}{\sqrt{P_z}} = \pm\frac{4{,}1}{2} = \pm 2''.$$

Zum Zwecke der Berechnung der vorletzten Unbekannten y erfolgt Umstellung der Koeffizienten der Normalgleichungen und Wiederholung des Verfahrens:

Koeffiz. der Normalgleichungen u. Reduktion					Probe
+6	+2	+4	−2,9	+ 9.1	+ 9,1
	$(-\frac{2}{3})$	$(-1\frac{1}{3})$	(+0,97)	(− 3,0)	
.	**+6**	+4	+5,7	+ 6,3	+ 6,3
		$(-2\frac{2}{3})$	(+1,93)	(− 6,07)	
.	.	**+8**	−6,5	+ 9,5	+ 9,5
			(−1,40)	(+ 4.40)	
			+8,33	+ 6,77	− 6,77
				(—13,8)	
.	.	.	.	**+18,13**	+18,13

1. Reduktionsstufe u. Reduktion				Probe
$\mathbf{+5\frac{1}{3}}$	$+2\frac{2}{3}$	−4,73	+3,27	+3,3
	$(-1\frac{1}{3})$	(+2,37)	(−1,64)	
.	$\mathbf{+5\frac{1}{3}}$	−4,57	+3,43	+3,43
		(−4,20)	(+2.90)	
.	.	**+6,93**	−2,37	−2,37
			(−2,00)	
.	.	.	**+4,33**	+4,33

2. Reduktionsstufe u. Reduktion			Probe
+4	−2,20	+1,80	+1,79
	(−1.21)	(+0,99)	
.	**+2,73**	+0,53	+0.53
		(−0.81)	
.	.	**+2,33**	+2,33

Hieraus

$$y = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = -\frac{-2{,}20}{4} = +0{,}55 \text{ Dekasekd.} = +5{,}5'' ,$$

also

$$Y = 99^0\, 78'\, 12'' + 5{,}5'' = 99^0\, 78'\, 17{,}5''$$

$$P_y = [cc \cdot 2] = 4 .$$

3. Reduktionsstufe u. Schlußprobe. $[vv]$.

+1,52	**+1,52**
.	**+1,52**

in Übereinstimmung mit der Reduktion für Z.

Die Berechnung ergibt für die Winkel y und z dasselbe Gewicht 4. Dies war angesichts der symmetrischen Anordnung der Winkelbeobachtung vorauszusehen, denn jeder der drei gesuchten Winkel erscheint durch die zwölf gemessenen Winkel viermal bestimmt. Wir sind aber dadurch der nochmaligen Umstellung und Reduktion für die Berechnung von x enthoben. Diese letzte Unbekannte x werden wir durch Einsetzung von y und z in eine der Normalgleichungen ermitteln.

Z. B. liefert die erste Normalgleichung:

$$6x + 4y + 2z - 5{,}7 = 0$$

$$x = \frac{5{,}7 - 4 \cdot 0{,}55 - 2 \cdot (-0{,}09)}{6}$$

$$= \frac{5{,}7 - 2{,}2 + 0{,}18}{6} = \frac{3{,}68}{6}$$

$$= +0{,}61 \text{ Dekasekd.} = +6{,}1''$$

und

$$X = 106^0\, 52'\, 43'' + 6{,}1'' = 106^0\, 52'\, 49{,}1''$$

$$P_X = 4$$

$$M_X = \pm 2'' .$$

Wir haben also als Schlußresultat:

$$\left.\begin{aligned} X &= 106^0\, 52'\, 49{,}1'' \pm 2'' \\ Y &= 99^0\, 78'\, 17{,}5'' \pm 2'' \\ Z &= 78^0\, 95'\, 96{,}1'' \pm 2'' \end{aligned}\right\} P_X = P_Y = P_Z = 4 .$$

Eine durchgreifende Probe erhalten wir schließlich durch Einsetzung der gefundenen Werte für x, y, z in die Fehler-

gleichungen. Die berechneten v müssen alsdann den Gleichungen (33) entsprechen:

$$[a v] = 0\,, \quad [b v] = 0\,, \quad [c v] = 0\,,$$

und es muß überdies

$$[v v] = 1{,}52\,.$$

Fehler-Gleichung	v +	v −	av +	av −	bv +	bv −	cv +	cv −	vv
1	0,61		0,61		0		0		0,37
2	0,55		0		0,55		0		0,30
3		0,09	0		0			0,09	0,01
4	0,23			0,23		0,23		0,23	0,05
5		0,14		0,14		0,14	0		0,02
6	0,27		0,27		0,27		0,27		0,07
7	0,06		0		0,06		0,06		0
8	0,09			0,09	0			0	0,01
9	0,44			0,44		0,44		0	0,19
10	0,45		0			0,45		0	0,20
11		0,36	0		0,36		0,36		0,13
12	0,39		0		0			0,39	0,15
		[ ] =	0,88	0,90	1,24	1,26	0,69	0,71	1,50 statt 1,52
			0,02		0,02		0,02		

(Abrundungsdifferenzen)

Anmerkung. Hätten wir den Beobachtungswert jedes *Winkels mit demjenigen* seines Implementes zu einem Werte

vereinigt (gemittelt), so wäre die Zahl der Fehlergleichungen auf die Hälfte reduziert, das Gewicht jedes so gewonnenen Winkels auf das Doppelte gesteigert worden. Im übrigen wäre der Weg der Rechnung derselbe geblieben.

---

3. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

---

§ 20. Erweiterung der für gleichwertige Beobachtungen aufgestellten Ausgleichungsgrundsätze auf ungleichwertige Beobachtungen.

Wenn die einzelnen Beobachtungswerte L, aus denen die Unbekannten $X, Y \ldots$ errechnet werden sollen, von ungleicher Genauigkeit sind (etwa deshalb, weil sie mit verschiedenerlei Instrumenten, oder nach verschiedenerlei Beobachtungsmethoden, oder auf Grund verschieden oftmaliger Wiederholung gewonnen wurden), so ändert dies weder an den zwischen beiderlei Größen bestehenden Beziehungen (25) $F(X, Y \ldots) - L = 0$, noch an den durch Einführung von Näherungswerten $N_x \ldots$ für $X \ldots$ gebildeten Beziehungen (25e) $a x + \cdots + l = v$ das geringste. Nur wird der — im Falle vorhandener Überbestimmung jedem Beobachtungswert L zuzuschlagende und etwa durch Einsetzung der gefundenen Werte für die Unbekannten in Gleichungen (25a) oder (25e) zu ermittelnde — Verbesserungsbetrag v, welcher durch die unvermeidlichen Beobachtungsungenauigkeiten nötig wird, um so kleiner sein, je genauer die Beobachtungswerte L sind. Es ist daher nicht mehr angängig, diese Verbesserungszuschläge unterschiedslos den weiteren Unter-

(27a) $$x = -\frac{[p\,a\,l]}{[p\,a\,a]}$$

(28a) $$[p\,a\,v] = 0$$

(37a) $$[p\,v\,v] = [p\,l\,l \cdot 1]$$

und für die mittleren Fehler und Gewichte nach der Ausgleichu
mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1

(36a) $$\div \cdot \mu = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{\lambda - 1}}\,,$$

mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht p

(36b) $$\div \cdot m = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{p\,(\lambda - 1)}}\,,$$

Gewicht P der Unbekannten x

(39a) $$P_x = [p\,a\,a]\,,$$

mittlerer Fehler der Unbekannten x

(38a) $$M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{[p\,a\,a]\;(\lambda - 1)}}\,.$$

Analog ändern sich die Gleichungen des § 15 bei I
stimmung von zwei, drei oder mehr Unbekannten und lauten z.]

b) im Falle der Bestimmung von vier Unb
kannten:

(29a) $$\left\{\begin{aligned} [p\,d\,l \cdot 3] &= [p\,d\,l \cdot 2] - \frac{[p\,c\,d \cdot 2]}{[p\,c\,c \cdot 2]}[p\,c\,l \cdot 2] \\ [p\,d\,d \cdot 3] &= [p\,d\,d \cdot 2] - \frac{[p\,c\,d \cdot 2]}{[p\,c\,c \cdot 2]}[p\,c\,d \cdot 2] \\ [p\,l\,l \cdot 4] &= [p\,l\,l \cdot 3] - \frac{[p\,d\,l \cdot 3]}{[p\,d\,d \cdot 3]}[p\,d\,l \cdot 3] \end{aligned}\right.$$

(34a) $$x_4 = -\frac{[p\,d\,l \cdot 3]}{[p\,d\,d \cdot 3]}$$

(35a) $$\left\{\begin{aligned} [p\,a\,v] &= 0 \\ [p\,b\,v] &= 0 \\ [p\,c\,v] &= 0 \\ [p\,d\,v] &= 0 \end{aligned}\right.$$

(37d) $$[p\,v\,v] = [p\,l\,l \cdot 4]\,.$$

Für die mittleren Fehler und Gewichte nach der Ausgleichung erhält man:
mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1

(36a) $$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{\lambda - 4}}\,,$$

mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht p

(36b) $$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{p\,(\lambda - 4)}}\,.$$

Gewicht der bei der Reduktion rechts stehenden Unbekannten

(39a) $$P = [p\,d\,d \cdot 3]\,,$$

mittlerer Fehler der rechts stehenden Unbekannten

(38a) $$M = \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \pm\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{[p\,d\,d \cdot 3]\;(\lambda - 4)}}$$

usw.

Auch die in § 19 aufgestellten Rechenproben durch Einführung der Summen s der in jeder Fehlergleichung vorhandenen Koeffizienten $a, b \ldots$ und des Absolutgliedes l bleiben analog bestehen.

Wenn die ursprünglich zwischen den Unbekannten X, $Y\ldots$ und den Beobachtungswerten $L_1 \ldots$ vorhandenen Beziehungen lauteten

(25) $$\begin{cases} F_1(X,\ Y\ldots) - L_1 = 0 \\ F_2(X,\ Y\ldots) - L_2 = 0 \quad \text{usw.,} \end{cases}$$

wobei den Beobachtungswerten $L_1, L_2 \ldots$ die Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ zukamen, so haben wir diese Urbeziehungen durch Einführung von Näherungswerten N_X, $N_Y \ldots$ nach dem in § 14 gezeigten Verfahren linear gemacht und die Fehlergleichungen geschaffen:

(25e) $$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + \cdots + l_1 = v_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + \cdots + l_2 = v_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Den Absolutgliedern $l_1 \ldots$ kamen dabei dieselben Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ zu, wie den Beobachtungswerten $L_1, L_2 \ldots$. Wir haben sodann, um die Verbesserungen v je auf die Gewichts-

einheit zurückzuführen, die Fehlergleichungen (25e) in die Form umgewandelt:

$$(25\text{f})\quad \begin{cases} a_1\sqrt{p_1}\,x + b_1\sqrt{p_1}\,y + c_1\sqrt{p_1}\,z + \cdots + l_1\sqrt{p_1} = v_1\sqrt{p_1} \\ a_2\sqrt{p_2}\,x + b_2\sqrt{p_2}\,y + c_2\sqrt{p_2}\,z + \cdots + l_2\sqrt{p_2} = v_2\sqrt{p_2} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

so daß die Koeffizienten und Absolutglieder der neuen Fehlergleichungen heißen

$$a_1\sqrt{p_1}\,,\ b_1\sqrt{p_1}\,,\ c_1\sqrt{p_1}\,,\ \ldots\ l_1\sqrt{p_1}\quad \text{usw.}$$

Wir können jetzt für die Ausgleichung ungleichwertiger Beobachtungen genau dieselben Summengleichungen (40) bilden, welche wir in § 19 zur Schaffung von Rechenproben gebildet haben, indem wir setzen

$$(40\text{a})\quad \begin{cases} a_1\sqrt{p_1} + b_1\sqrt{p_1} + c_1\sqrt{p_1} + \cdots + l_1\sqrt{p_1} = s_1\sqrt{p_1} \\ a_2\sqrt{p_2} + b_2\sqrt{p_2} + c_2\sqrt{p_2} + \cdots + l_2\sqrt{p_2} = s_2\sqrt{p_2} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Durch Multiplikation der ersten Zeile mit $a_1\sqrt{p_1}$, der zweiten Zeile mit $a_2\sqrt{p_2}$ usw. und vertikale Addition kommt:

$$(41\text{a})\quad [p\,a\,a] + [p\,a\,b] + [p\,a\,c] + \cdots + [p\,a\,l] = [p\,a\,s]\,,$$

durch Multiplikation mit $b_1\sqrt{p_1}$ bzw. $b_2\sqrt{p_2}$ usw. kommt:

$$(41\text{a})\quad [p\,a\,b] + [p\,b\,b] + [p\,b\,c] + \cdots + [p\,b\,l] = [p\,b\,s]\,,$$

durch Multiplikation mit $l_1\sqrt{p_1}$ bzw. $l_2\sqrt{p_2}$ usw. kommt:

$$(41\text{a})\quad [p\,a\,l] + [p\,b\,l] + [p\,c\,l] + \cdots + [p\,l\,l] = [p\,l\,s]\,,$$

durch Multiplikation mit $s_1\sqrt{p_1}$ bzw. $s_2\sqrt{p_2}$ usw. kommt:

$$(41\text{a})\quad [p\,a\,s] + [p\,b\,s] + [p\,c\,s] + \cdots + [p\,l\,s] = [p\,s\,s]\,.$$

Wir haben also für die Koeffizienten der Normalgleichungen hier genau dieselben Rechenproben, wie in § 19, sobald wir nicht bloß jeden Koeffizienten und jedes Absolutglied der Fehlergleichungen, sondern auch ihre Summe s mit der Wurzel aus dem zugehörigen Gewicht multiplizieren.

Ganz ebenso verhält es sich mit den Koeffizienten der ersten Reduktionsstufe, wo

$$(42\text{a})\left\{\begin{array}{l|l} [pbb\cdot 1]+[pbc\cdot 1]+\cdots+[pbl\cdot 1] & -[pbs\cdot 1]=0\\ [pbc\cdot 1]+[pcc\cdot 1]+\cdots+[pcl\cdot 1] & -[pcs\cdot 1]=0\\ \vdots & \vdots\\ [pbl\cdot 1]+[pcl\cdot 1]+\cdots+[pll\cdot 1] & -[pls\cdot 1]=0\\ \hline -[pbs\cdot 1]-[pcs\cdot 1]-\cdots-[pls\cdot 1] & +[pss\cdot 1]=0 \end{array}\right.$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(42\text{a})\left\{\begin{array}{llll|l} & & & & \text{Probe}\\ \underline{[pbb\cdot 1]} & [pbc\cdot 1] & \ldots & [pbl\cdot 1] & [pbs\cdot 1]\\ . & \underline{[pcc\cdot 1]} & \ldots & [pcl\cdot 1] & [pcs\cdot 1]\\ & & & \vdots & \vdots\\ . & . & . & \underline{[pll\cdot 1]} & [pls\cdot 1]\\ \hline . & \vdots & . & . & \underline{[pss\cdot 1]}\,. \end{array}\right.$$

In der zweiten Reduktionsstufe ist:

$$(43\text{a})\left\{\begin{array}{l|l} [pcc\cdot 2]+\cdots+[pcl\cdot 2] & -[pcs\cdot 2]=0\\ \vdots & \\ [pcl\cdot 2]+\cdots+[pll\cdot 2] & -[pls\cdot 2]=0\\ \hline -[pcs\cdot 2]-\cdots-[pls\cdot 2] & +[pss\cdot 2]=0 \end{array}\right.$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(43\text{a})\left\{\begin{array}{lll|l} & & & \text{Probe}\\ \underline{[pcc\cdot 2]} & \ldots & [pcl\cdot 2] & [pcs\cdot 2]\\ & & \vdots & \\ . & . & \underline{[pll\cdot 2]} & [pls\cdot 2]\\ \hline . & . & . & \underline{[pss\cdot 2]}\,. \end{array}\right.$$

Endlich kommt die Schlußprobe:

$$(44\text{a})\qquad [pll\cdot 3]=[pls\cdot 3]=[pss\cdot 3]=[pvv]\,.$$

Sind die einzelnen L gleichartige, mit demselben Instrument und nach denselben Methoden gewonnene Beobachtungswerte, so sind die Gewichte $\mathfrak{p}$, die wir bisher *als bekannt* annahmen, einfach proportional den *Wiederholungszahlen.* Sind sie aber ungleichartig, oder mit ve

schiedenen Methoden und Instrumenten gewonnen, so wissen wir über ihre Gewichte zunächst nichts.

Wir schätzen in diesem Falle zweckmäßigerweise die ihnen anhaftenden mittleren Fehler m und berechnen hieraus unter beliebiger Annahme eines Gewichtseinheitsfehlers μ das zugehörige Gewicht nach Gleichung (15)

$$m_1 : \mu = \sqrt{1} : \sqrt{p_1}$$

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2}$$

oder für $\mu = 1$

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2} \quad \text{usw.}$$

Führt man mit den so erhaltenen Gewichten, denen gewisse a n g e n o m m e n e mittlere Fehler m zugrunde liegen (mittlere Fehler v o r der Ausgleichung), die Ausgleichung durch, so erhält man nach Gleichungen (36a) und (36b) mittlere Fehler n a c h der Ausgleichung, welche mit den ersteren übereinstimmen müssen, wenn diese richtig gewählt wurden und keine einseitigen Fehlerquellen auf die Beobachtungen einwirkten. Nötigenfalls kann man die Rechnung mit i h n e n bzw. den aus ihnen abgeleiteten Gewichten wiederholen.

Nach dem soeben Erkannten ist

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2}, \quad p_2 = \frac{1}{m_2^2} \quad \text{usw.,}$$

folglich der Faktor, mit dem sämtliche Koeffizienten und die Absolutglieder und Verbesserungszuschläge v einer Fehlergleichung multipliziert wurden, $\sqrt{p} = \frac{1}{m}$.

Da m eine Größe gleicher Gattung ist wie l und v, so werden diese durch die Multiplikation mit $\sqrt{p}$ un-

benannte Zahlen, was schon zur Ermöglichung der durchzuführenden Differentiationen, Multiplikationen und Quadrierungen vorausgesetzt war.

---

4. Kapitel.

Anwendung der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen auf trigonometrische Punkteinschaltung.

---

§ 21. Graphisches Ausgleichungsverfahren für Vorwärts- und vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden.

Die trigonometrische Punkteinschaltung bildet eine der häufigst auftretenden Ausgleichungsaufgaben aus dem Gebiete der Geodäsie. Sie bezweckt die Bestimmung der rechtwinkligen Koordinaten x_P und y_P von „Neupunkten" P auf Grund von Bestimmungsstrahlen, die von „Festpunkten" ausgehen und deren Richtung durch Beobachtung der Winkel α im Neupunkt zwischen ihnen selbst, oder der Winkel β in den Festpunkten zwischen ihnen und den Verbindungslinien nach anderen Festpunkten („Feststrahlen") festgelegt wird. Sind solche Winkel β nur in (mindestens zwei) Festpunkten gemessen, so hat man die Aufgabe des „Vorwärtseinschnittes". Sind nur Winkel α im Neupunkt zwischen den (mindestens drei) Bestimmungsstrahlen gemessen, so hat man die Aufgabe des „Rückwärtseinschnittes". Wurden Winkel sowohl im Neupunkt zwischen den Bestimmungsstrahlen selbst (α), als in den Festpunkten zwischen Fest- und Bestimmungsstrahlen (β) gemessen, so wird der Neupunkt durch „vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden" bestimmt. In jedem Falle orientieren wir die beobachteten Winkel oder Richtungen α oder β zu Richtungs- (Neigungs-) winkeln μ der von den Festpunkten gegen den Neupunkt gerichteten Bestimmungsstrahlen. Jede (gleichgültig, ob rein rech-

nerische oder graphische) Lösung geht aus von einem s
Koordinaten x_N und y_N nach irgendwie ermittelten, mög
nahe dem endgültigen Neupunkt gelegenen „Näherungs"-
„vorläufigen Punkt" N, so daß als neue Unbekannte nicht
die Koordinaten x und y des Neupunktes P selbst, son
in Übereinstimmung mit dem bisherigen, die Zuschläg
und dy gelten, deren Addition die vorläufigen Koordi
zu den endgültigen ergänzt.

$$(45) \qquad \begin{cases} x_P = x_N + dx \\ y_P = y_N + dy \end{cases}$$

Um diese Zuschläge zu finden, beachten wir, da
Bestimmungsstrahlen infolge von Ungenauigkeiten in u
eigenen Winkelmessung, sowie infolge von Projektio
zerrungen und Mißstimmigkeiten zwischen den gege
Koordinaten der Festpunkte und dem Standort der letz
sich nicht in einem Punkte und noch viel weniger g
im Näherungspunkte N schneiden, sondern eine f
zeigende Figur miteinander bilden werden, in deren Nä
liegt und innerhalb welcher wir den wahrscheinlic
Punkt P auswählen müssen. Es wird sich also zu
darum handeln, die gegenseitige Lage der Bestimmungsst
und des vorläufigen Punktes N zu erkennen, — in
lichst großem Maßstabe (etwa 1 : 10) aufzuzeichnen. Zu d
Zwecke berechnen wir aus den orientierten Richtungswe
entweder die Entfernungen der Punkte von N, in
die Bestimmungsstrahlen die eine oder die andere der
N gezogenen Parallelen zu den beiden Koordinatena
schneiden. Diese tragen wir sodann im gewählten Maß
von N aus auf den Parallelen in der festgestellten Ric
ab, um schließlich durch ihre Endpunkte die Bestimm
strahlen entsprechend ihrer tatsächlichen Lage unter
orientierten Richtungen μ gegen die Parallele zur $-x$-
zu zeichnen. (Zur $-x$-Achse, weil die jetzt zu zeichne
vom Neupunkte P ausgehenden Strahlen statt der Ne
$\mu = nAP$ usw. den Richtungswinkel $\mu \pm 2R = nPA$
besitzen.) Oder wir berechnen außer den orienti
Richtungen μ noch die entsprechenden Richtungs-
gungs-)winkel ν von den Festpunkten nach dem vorläu
Punkte N und aus der Differenz $\delta = \mu - \nu$ und der Stra

länge s die Querabweichung b des Bestimmungsstrahles vom vorläufigen Punkte N. Sie wird (vom Festpunkte aus gesehen nach $\frac{\text{links}}{\text{rechts}}$ für $\delta = \mp$) von N im ausgewählten Maßstabe senkrecht zu der wie oben bestimmten orientierten Richtung μ abgetragen, um durch den Endpunkt den Be-

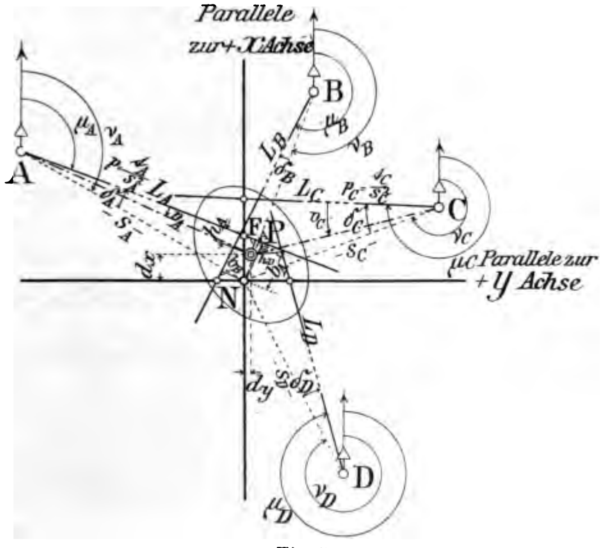


Fig. 5.

stimmungsstrahl parallel zu ebendieser Richtung μ zu zeichnen. Ist derart, auf die eine oder die andere Weise die gegenseitige Lage der Bestimmungsstrahlen unter sich und zum Näherungspunkt N zeichnerisch bekannt, so handelt es sich um die Auswahl des endgültigen Punktes P in der „fehlerzeigenden Figur". Dabei ist zu beachten, daß bei gleichem Fehler in der Winkelbeobachtung die lineare

Abweichung des Bestimmungsstrahles vom wahren Punkt wächst proportional der Strahlenlänge s und demgemäß das Strahlengewicht für die Punktbestimmung umgekehrt proportional zum Quadrat der Strecke s. Auch wird ein Strahl, der bloß im Festpunkt oder bloß im Neupunkt beobachtet wurde, nur das halbe Gewicht gegenüber einem Strahl besitzen, der mit gleicher Genauigkeit in beiden Punkten beobachtet wurde. Folglich wird das Bestimmungsgewicht

(46)
$$p_s = \frac{1}{s^2} \text{ sein, wenn die Beobachtung einseitig,}$$
$$p_s = \frac{2}{s^2} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{zweiseitig}$$
erfolgte. Allgemein
$$p_s = \frac{t}{s^2}, \text{ wobei nach dem Vorhergehenden } t = 1$$

oder 2 sein kann. Wo auch immer der endgültige Punkt P innerhalb der Fehlerfigur gewählt werden möge: seine Abstände h von den Bestimmungsstrahlen stellen deren Querverfehlung dar, aus welcher sich rückwärts die an den beobachteten orientierten Richtungen μ anzubringenden Verbesserungszuschläge v nach Richtung und Größe berechnen lassen:

$$v'' = \frac{h}{s} \varrho'' . \tag{47}$$

Gleiche Genauigkeit der Winkelbeobachtung vorausgesetzt, ist das Richtungsgewicht $p_\mu = p_v = t$, und wir müssen daher nach Bisherigem verlangen:

$$[t v v] = \left[t \frac{h^2}{s^2}\right] \varrho^2 = \varrho^2 \left(t_1 \frac{h_1^2}{s_1^2} + t_2 \frac{h_2^2}{s_2^2} + \cdots\right) = \text{Min.} \tag{48a}$$

Setzen wir in (48a) nach Gleichung (46) $p = \frac{t}{s^2}$, und beachten, daß ϱ konstant, so geht (48a) über in:

$$[t\,v\,v] = \varrho^2 (p_1 h_1^2 + \cdots + p_n h_n^2) = \text{Min.},$$

d. h. wir haben in der Fehlerfigur den endgültigen Punkt P so auszuwählen, daß

$$(48\text{b}) \qquad \underline{[p\,h\,h] = \text{Min.}}$$

Von den verschiedenen Verfahren der Punktauswahl in der fehlerzeigenden Figur benutzen wir das von Bertot 1876 erstmals gezeigte, welches sich auf den Satz stützt: „Sind r· Gerade (Strahlen) L_A, $L_B \ldots L_R$ vom Gewicht p_A, $p_B \ldots p_R$ gegeben, so ist derjenige Punkt P, für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände h je multipliziert mit dem Strahlengewicht p ein Minimum ist, zugleich der Schwerpunkt des aus seinen Lotfußpunkten F gebildeten Systems von Massenpunkten, wenn jedem von ihnen das Gewicht seines Strahles beigelegt wird."

Würden wir hiernach durch Schätzung in der Fehlerfigur zufälligerweise den richtigen Punkt P gefunden haben, für welchen $[p\,h\,h] = \text{Min.}$, so würden wir diese Tatsache daraus erkennen, daß er der Schwerpunkt S seiner eigenen Lotfußpunkte F wäre, d. h. daß

$$(49) \qquad x_P = \frac{[p \cdot x_F]}{[p]} \quad \text{und} \quad y_P = \frac{[p \cdot y_F]}{[p]}.$$

Um P aufzusuchen, benutzen wir den zweiten Satz: „Sind mehrere Gerade L gegeben, und ist wieder für Punkt P die Summe der Quadrate seiner Abstände h je multipliziert mit dem Strahlengewicht p ein Min., so ist für irgend einen anderen Punkt A der Schwerpunkt seiner Lotfußpunkte $\mathfrak{F}_A \ldots$, denen wieder je das Strahlengewicht $p_A \ldots$ zugeschrieben wird, ein Punkt S, welcher zugleich

$$(50)\quad \begin{cases} (AP = 2\,r) : 2\,\mathfrak{r} = AS : \mathfrak{A}\mathfrak{S}\,, \quad \text{d. h.} \\ AP = 2\,r = \dfrac{AS}{\mathfrak{A}\mathfrak{S}} \cdot 2\,\mathfrak{r}\,. \end{cases}$$

Ist mittels des berechneten Maßes AP der end
Punkt P in die fehlerzeigende Figur auf der Gerad
eingetragen, so bilden seine der Figur 5 zu entne
den Koordinaten die Zuschläge dx und dy, wom
mittels Gleichung (45) die gesuchten Koordinaten
y_P gewinnt.

Also Lösung: Nach Aufzeichnung der Fehl
Zeichnung eines beliebigen Kreises $\mathfrak{M}$ durch
beliebigen Punkt A dieser Figur. Bestimmur
Schwerpunkte S (der $\mathfrak{J}$) und $\mathfrak{S}$ (der $\mathfrak{Q}$). Zei
des Linienzuges $AS\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}\mathfrak{S}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ und $A\mathfrak{P}$
Abtragen der Strecke $AP = \dfrac{AS}{\mathfrak{A}\mathfrak{S}} \cdot 2\,\mathfrak{r}$ im gewählte
stabe, Abgreifen von dx und dy.

Will man sich über die bei der Punktbesti
erreichte Genauigkeit Aufschluß verschaffen, so en
man die Querverfehlungen h aus der fehlerzei
Figur und erhält unter Beachtung, daß zwei vor
beobachteten Strahlen zur Bestimmung nötig war
Zahl der überschüssigen also $r - 2$ beträgt, die
lineare Querverfehlung eines Strahles vom Gewic

$$(51)\qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[p\,h\,h]}{(r-2)}}\,,$$

die mittlere Querverfehlung eines Strahles vom Ge

$$(51)\qquad m = \pm\sqrt{\frac{[p\,h\,h]}{(\mathfrak{r}-2)\,\mathfrak{p}}}\,,$$

den mittleren linearen Fehler des Punktes P:

$$M = \pm \sqrt{\frac{[p\,h\,h]}{(r-2)\,[p]}}\,, \tag{51}$$

den mittleren Fehler einer einseitig beobachteten Richtung

$$m''_\mu = \pm \sqrt{\frac{[t\,v\,v]}{r-2}} = \pm\,\varrho'' \sqrt{\frac{\left[t \cdot \frac{h^2}{s^2}\right]}{r-2}}\,. \tag{51}$$

Wird ein Punkt, wie im vorliegenden Fall, als Schnitt von Strahlen bestimmt, so ist seine Genauigkeit nach verschiedenen Richtungen verschieden, sobald diese Strahlen nicht gleichmäßig und gleich gewichtig über den Horizont verteilt sind. Z. B. wird in Figur 7

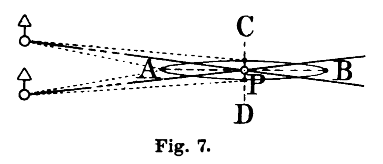


Fig. 7.

jede kleine Unsicherheit in der Richtung auch nur eines der beiden Bestimmungsstrahlen deren Schnittpunkt erheblich in der Richtung AB, nur wenig dagegen in der Richtung CD verschieben. Es wird möglich sein, unendlich viele Punkte zu finden, für welche die mittlere Querverfehlung M (oder der mittlere Fehler m''_μ einer Richtung) einen bestimmten Wert annimmt. Die stetige Verbindung dieser Punkte (Linie gleichen mittleren Fehlers) wird eine Ellipse („Fehlerellipse“) um den Schnittpunkt P ergeben, deren große/kleine Achse die Richtung der größten/kleinsten Bestimmungsunsicherheit und deren Achsenverhältnis das Verhältnis der letzteren anzeigt.

Ebensolche Fehlerellipsen können wir auch im Falle der Verwendung beliebig vieler Bestimmungsstrahlen zeichnen. Wir werden in diesem Falle nur für eine Anzahl — etwa in profilartigen Reihen angeordneter — Punkte nach Gleichung (51) je die mittleren Fehler M oder m_μ bestimmen, sodann nach Art der Interpolation von Horizontalkurven in den Profilrichtungen Punkte bestimmter runder M oder m_μ aufsuchen und schließlich diese durch stetige Kurven verbinden. Wenn wir Wert darauf legen, einen Neupunkt mit möglichst großer und nach jeder Richtung gleicher Zuverlässigkeit zu bestimmen, so müssen wir dafür sorgen, daß nicht bloß die (bezüglich der Richtung neutralen) Fehlerausdrücke μ, m, M, m_μ absolut möglichst klein werden, sondern auch, daß die Fehlerellipsen sich möglichst der Kreisform nähern.

§ 22. Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für trigonometrische Punkteinschaltung durch Vorwärtseinschnitt.

Zur rechnerischen Bestimmung der den Näherungskoordinaten N_X und N_Y für den Neupunkt beizufügenden Zuschläge dx und dy [s. Gleichung (45)] wollen wir vorbereitend die Beziehung feststellen, welche zwischen kleinen Koordinatenänderungen dx und dy des Endpunktes B einer Strecke AB und der dadurch hervorgerufenen Änderung $d\varphi$ ihres Richtungs- (Neigungs-)winkels $\varphi = nAB$ besteht. Für die Koordinaten des Endpunktes B einer unter dem Richtungswinkel nAB von A ausgehenden Strecke $AB = s$ hat man allgemein:

$$(52) \quad \begin{aligned} y_B &= y_A + AB \cdot \sin nAB \\ x_B &= x_A + AB \cdot \cos nAB\,, \end{aligned}$$

woraus

$$\text{(52)} \qquad \operatorname{tg} nAB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und

$$\text{(52)} \qquad nAB = \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Daraus folgt durch Differentiation, wenn man $AB = s$ und $nAB = \varphi$ setzt:

$$\text{(53)} \quad \begin{cases} d(nAB) \equiv d\varphi \underset{\text{analyt.}}{=} \dfrac{\Delta x}{s^2} dy - \dfrac{\Delta y}{s^2} dx, \quad \text{oder} \\ d\varphi'' = \dfrac{\Delta x}{s^2} \varrho'' dy - \dfrac{\Delta y}{s^2} \varrho'' dx \\ \quad = \dfrac{\cos\varphi}{s} \varrho'' dy - \dfrac{\sin\varphi}{s} \varrho'' dx \\ \quad = \dfrac{\cos^2\varphi}{\Delta x} \varrho'' dy - \dfrac{\sin^2\varphi}{\Delta y} \varrho'' dx \end{cases}$$

Setzen wir

$$\text{(54)} \quad \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{s^2} \varrho'' = \dfrac{\cos\varphi}{s} \varrho'' = \dfrac{\cos^2\varphi}{\Delta x} \varrho'' = b \\ -\dfrac{\Delta y}{s^2} \varrho'' = -\dfrac{\sin\varphi}{s} \varrho'' = -\dfrac{\sin^2\varphi}{\Delta y} \varrho'' = a, \end{cases}$$

wobei also b das Vorzeichen von $\cos nAB$ bzw. Δx, a das entgegengesetzte Vorzeichen des sin bzw. Δy zukommt, so erhalten wir die Veränderung $d\varphi''$, welche der Richtungswinkel $nAB = \varphi$ dadurch erleidet, daß man den Endpunkt B der Strecke AB um die kleinen Beträge dx und dy parallel den Koordinatenachsen verschiebt.

$$\text{(55)} \qquad \underline{d\varphi'' = a\,dx + b\,dy\,.}$$

Die Koeffizienten a und b heißt man „Richtungskoeffizienten“.

Verschiebt man statt des Endpunktes E den Anfangspunkt A der Strecke um dieselben Beträge, so ändert sich (wie auch geometrisch klar) der Richtungswinkel φ um denselben Betrag $d\varphi$, aber in entgegengesetztem Sinne.

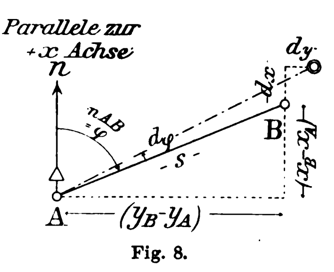


Fig. 8.

Wir können nun zur eigentlichen Aufgabe der Punkteinschaltung übergehen. Die in jedem der n_0 zur Neubestimmung benutzten Festpunkte nach dem Neupunkte beobachteten „äußeren“ oder „Vorwärts“-Richtungen α seien auf Grund von n_f weiteren, von den ersteren nach anderen Festpunkten gemessenen Richtungen α und den zugehörigen, aus den Koordinaten ihrer Endpunkte berechneten Richtungs- (Neigungs-)winkeln φ orientiert. Die orientierten Richtungswerte β nach dem Neupunkt erhalten dabei das Gewicht $1, 2 \ldots n_f$, wenn zu ihrer Gewinnung $1, 2 \ldots n_f$ gemessene Winkel zwischen dem Neustrahle und $1, 2 \ldots n_f$ Feststrahlen verwendet worden sind. Ist die Beobachtung satzweise ausgeführt, und sind in die Sätze außer dem Neustrahle noch n_f Richtungen $\alpha_1 \ldots \alpha_{n_f}$ nach Festpunkten (Feststrahlen) aufgenommen worden, so ist das beobachtete Richtungsbüschel α zur Orientierung um den Winkel ω *zu verdrehen*, der sich ergibt als arithmetisches Mittel

$\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n_f}$. Damit wird die orientierte Richtung

nach dem Neupunkte P: $\beta = \alpha_P + \frac{[\varphi - \alpha]}{n_f} = \alpha_P + \omega$

und ihr mittlerer Fehler $m_\beta = \pm\sqrt{m_\alpha^2 + m_\omega^2}$. Setzt man die Richtungswinkel φ der Feststrahlen als fehlerfrei voraus, so ist der mittlere Fehler von $(\varphi - \alpha)$ gleich demjenigen von α, somit, da zur Bildung von ω n_f Werte verwendet wurden, $m_\omega = \frac{m_\alpha}{\sqrt{n_f}}$. Damit wird

$$m_\beta = \pm\sqrt{m_\alpha^2 + \frac{m_\alpha^2}{n_f}} = m_\alpha \sqrt{\frac{n_f + 1}{n_f}}$$

und wir erhalten aus der Proportion (15) $p_\beta : p_\alpha = m_\alpha^2 : m_\beta^2$ das Gewicht der in den Festpunkten satzweise beobachteten und orientierten „äußeren" oder „Vorwärts-" Richtungen β nach dem Neupunkte:

$$p_\beta = p_\alpha \frac{m_\alpha^2}{m_\beta^2} = p_\alpha \cdot \frac{n_f}{n_f + 1}. \tag{56}$$

Für $p_\alpha = 1$ wird $p_\beta = \frac{n_f}{n_f + 1}$.

Wir haben nun dreierlei von jedem der Festpunkte $A, B \ldots$ ausgehende, gegen den Neupunkt gerichtete Strahlen zu unterscheiden, nämlich:

1. Die aus der Winkelmessung gewonnenen, zur Bestimmung des Neupunktes dienenden orientierten Richtungen β, welche sich infolge von Ungenauigkeiten (in der Messung, den Festpunktskoordinaten usw.) nicht, wie es sein sollte, in einem Punkte schneiden werden und die wir mit κAP, $\kappa BP \ldots$ bezeichnen wollen.
2. Die Verbindungslinien der benutzten Festpunkte mit dem vorläufigen Punkt N, deren aus den Koordinaten

zu berechnende Richtungs- (Neigungs-)winkel mit (nAP), (nBP) ... bezeichnet sein mögen.

3. Die Verbindungslinien der Festpunkte mit dem endgültigen, seiner Lage nach zunächst noch unbekannten Neupunkt P, deren zunächst unbekannte Richtungswinkel wir mit $[nAP]$, $[nBP]$*) ... bezeichnen.

Wir erhalten nun folgende Gleichungen für die auftretenden kleinen Winkeländerungen (linksläufige Drehung in Fig. 9 bedeutet negativen Wert):

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Verbesserungszuschlag an } \beta_A \equiv v_A'' = [nAP] - nAP \\ \qquad\text{"} \qquad\qquad \text{"} \quad \beta_B \equiv v_B'' = [nBP] - nBP \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array} \right.$$

Veränderung $d\varphi$ des Richtungswinkels $\left\{ \begin{array}{l} nAN = (nAP) \\ nBN = (nBP) \\ \vdots \qquad \vdots \end{array} \right\}$,

welche eintritt, wenn man den vorläufigen Endpunkt N um die zunächst unbekannten Beträge dx, dy nach P verschiebt:

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} d''\varphi_A = [nAP] - (nAP) \\ d''\varphi_B = [nBP] - (nBP) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array} \right.$$

Ersetzt man die endgültigen Richtungswinkel $[nAP]$, ... in Gleichungen (b) durch $nAP + v_A$, ... aus Gleichungen (a), so erhält man

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} d''\varphi_A = nAP - (nAP) + v_A'' \\ d''\varphi_B = nBP - (nBP) + v_B'' \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array} \right.$$

*) [ ] hat hier und im folgenden jeweils nicht die dem Zeichen *bisher allein* zugeschriebene Summenbedeutung, sondern auch *noch die* Aufgabe, endgültige Winkel- oder Richtungswerte *als solche zu* kennzeichnen! Ob die eine oder andere Bedeutung *in Frage* kommt, ergibt sich aus dem Sinne der Ableitung

er

$$\begin{cases} v_A'' = d\varphi_A + (nAP) - nAP \\ v_B'' = d\varphi_B + (nBP) - nBP \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Die Änderungen $d\varphi$ der Richtungswinkel können wir ttels Gleichung (55) in den Koordinatenzuschlägen dx

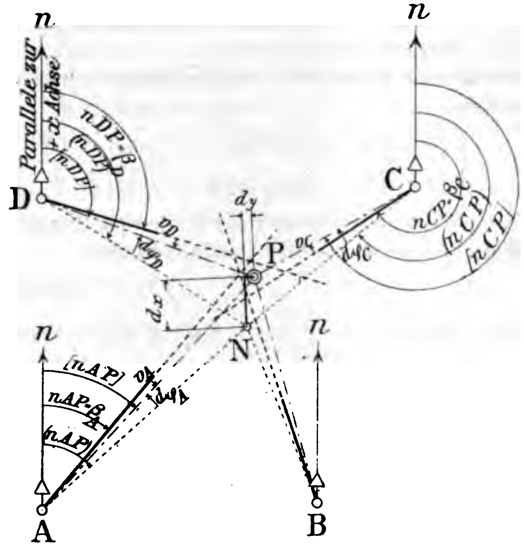


Fig. 9.

ıd dy ausdrücken. Bezeichnen wir ferner die Unterhiede $(nAP) - nAP \ldots$ zwischen den (Näherungs-) ichtungswinkeln nach dem vorläufigen Neupunkt N und n *gemessenen*, orientierten Richtungen β analog Gleiıng (25d) mit l_A, $l_B \ldots$, dann gehen die obigen Gle

$$
\text{(b)} \quad \begin{cases} (\alpha_1) \equiv ANB \equiv (APB) = (n\,PB) - (n\,PA) \\ (\alpha_2) \equiv BNC \equiv (BPC) = (n\,PC) - (n\,PB) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}
$$

Wir können weiter die Veränderungen $d\varphi_A$, $d\varphi_B$ .. welche die vorläufigen Richtungswinkel $(n\,PA)$, $(n\,PB)$. dadurch erleiden, daß man den vorläufigen Punkt N na

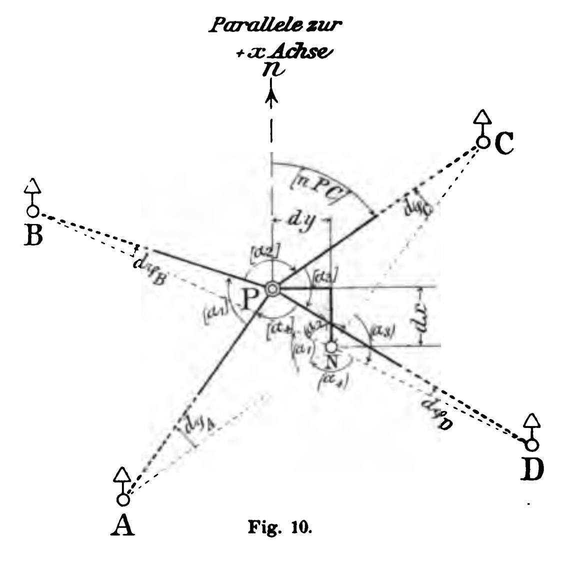


Fig. 10.

P verschiebt, mittels Gleichung (55) in den (zunäcl unbekannten) Verschiebungen dx und dy ausdrück wobei wir allerdings beachten müssen, daß wir jetzt nic den Endpunkt, sondern den Anfangspunkt der Strecke v schieben, wodurch $d\varphi$ das entgegengesetzte Vorzeich *erhält. Setzen* wir daher

$$(54a) \quad \begin{cases} \mathfrak{a} = -a = \dfrac{\sin\varphi}{s}\varrho'' \\ \mathfrak{b} = -b = -\dfrac{\cos\varphi}{s}\varrho'', \end{cases}$$

so wird

$$(c) \quad \begin{cases} d\varphi_A = [n\,PA] - (n\,PA) = \mathfrak{a}_A\,dx + \mathfrak{b}_A\,dy \\ d\varphi_B = [n\,PB] - (n\,PB) = \mathfrak{a}_B\,dx + \mathfrak{b}_B\,dy \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

oder

$$(c) \quad \begin{cases} [n\,PA] = (n\,PA) + \mathfrak{a}_A\,dx + \mathfrak{b}_A\,dy \\ [n\,PB] = (n\,PB) + \mathfrak{a}_B\,dx + \mathfrak{b}_B\,dy \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Setzen wir die gewonnenen Werte für $[n\,PA] \ldots$ in Gleichung (a) ein, so erhalten wir die Fehlergleichungen:

$$(d) \quad \begin{cases} v_1 = (n\,PB) + \mathfrak{a}_B dx + \mathfrak{b}_B dy - (n\,PA) - \mathfrak{a}_A dx - \mathfrak{b}_A dy - \alpha_1 \\ v_2 = (n\,PC) + \mathfrak{a}_C dx + \mathfrak{b}_C dy - (n\,PB) - \mathfrak{a}_B dx - \mathfrak{b}_B dy - \alpha_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Wenn wir unter Benutzung der Gleichungen (b) wie bisher setzen: $l =$ Näherungswert — gemessener Wert des beobachteten Winkels:

$$\begin{aligned} (n\,PB) - (n\,PA) - \alpha_1 &= (\alpha_1) - \alpha_1 = l_1 \\ (n\,PC) - (n\,PB) - \alpha_2 &= (\alpha_2) - \alpha_2 = l_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

und ferner

$$\mathfrak{a}_{\text{des rechten Schenkels}} - \mathfrak{a}_{\text{des linken Schenkels}} = \mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{b}_{\text{des rechten Schenkels}} - \mathfrak{b}_{\text{des linken Schenkels}} = \mathfrak{B},$$

so erscheinen die Fehlergleichungen (d) in der gewöhnlichen Form:

$$(25e) \quad \begin{cases} v_1 = \mathfrak{A}_1\,dx + \mathfrak{B}_1\,dy + l_1 \\ v_2 = \mathfrak{A}_2\,dx + \mathfrak{B}_2\,dy + l_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases} \quad \text{Normalform der Fehlergleichungen.}$$

Ihre Zahl n_r ist gleich derjenigen der im Neupunkt beobachteten Winkel α. Letztere, folglich auch die Absolutglieder l sind gleichgewichtig. Wir erhalten daher die gesuchten Koordinatenzuschläge dx und dy aus den zwei Normalgleichungen:

$$\text{(26a)} \qquad \begin{cases} [\mathfrak{A}\mathfrak{A}]\,dx + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\,dy + [\mathfrak{A}\,l] = 0 \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\,dx + [\mathfrak{B}\mathfrak{B}]\,dy + [\mathfrak{B}\,l] = 0\,. \end{cases}$$

Zum Zweck von Rechenproben und zur Fehlerberechnung führen wir analog Gleichungen (40) bis (44) in die Reduktion weiter ein die Produkt- und Quadratsummen:

$$[l\,l]\,,\quad [\mathfrak{A}\mathfrak{S}]\,,\quad [\mathfrak{B}\mathfrak{S}]\,,\quad [l\,\mathfrak{S}]\,,\quad [\mathfrak{S}\mathfrak{S}]$$

und erhalten:

die rechts stehende Unbekannte $dy = -\dfrac{[\mathfrak{B}\,l\cdot 1]}{[\mathfrak{B}\mathfrak{B}\cdot 1]}$

und ihr Gewicht $P_{dx} = P_x = [\mathfrak{B}\mathfrak{B}\cdot 1]$,

ferner

$$\text{(37b)} \qquad [v\,v] = [l\,l\cdot 2]\,,$$

und (weil zwei der n_r in P gemessenen Winkel α zur Bestimmung von P nötig, also $(n_r - 2)$ überschüssig sind)

$$\text{(58)} \qquad M_y = \pm\sqrt{\frac{[l\,l\cdot 2]}{(n_r - 2)\,[\mathfrak{B}\mathfrak{B}\cdot 1]}}\,.$$

Die zweite Unbekannte dx, ihr Gewicht und mittlerer Fehler ergibt sich nach erfolgter Umstellung der Normalgleichungen auf dieselbe Weise.

B) Lösung bei Richtungsbeobachtung.

Das soeben vorgeführte Verfahren läßt sich ohne weiteres auch auf Richtungsbeobachtungen anwenden, *wenn man* die als gemessen vorausgesetzten Winkel

durch Subtraktion je zweier Richtungswerte α gewinnen will. Die Zahl der zu verwendenden Winkel und Fehlergleichungen wäre aber dann beim Vorhandensein von n_r · beobachteten und gleichmäßig zu berücksichtigenden Richtungen $= \binom{n_r}{2}$, also sehr groß. Wir suchen daher ein einfacheres Verfahren. Wie bisher mögen die Koordinaten x_N, y_N eines in möglichster Nähe des gesuchten Neupunktes P gelegenen vorläufigen Punktes N bekannt, also die ihnen zuzufügenden Zuschläge dx und dy [s. Gleichung (45)] gesucht sein.

Das im Neupunkte P gemessene Richtungsbüschel α kann man nun, ohne an der gegenseitigen Lage der Strahlen, also an der Eigenschaft der Richtungen als Messungsresultaten etwas zu ändern, um den zunächst unbekannten Betrag Z derart verdrehen, daß die Individuen dieses mit dem Scheitel nach dem zunächst unbekannten endgültigen Punkte P gelegten Strahlenbüschels von den Verbindungslinien dieses Neupunktes mit den Festpunkten möglichst wenig abweichen. Wären Messung der Richtungen und Lage der Festpunkte fehlerfrei und Projektionsverzerrung nicht vorhanden, so müßten dann sogar sämtliche Strahlen durch die entsprechenden Festpunkte gehen; der Unterschied (endgültiger Richtungswinkel $[nPA]$ . . . — endgültig orientierter Richtungswert $[\alpha_A]$ . . .) wäre $= 0$. Trifft dies nicht zu, so stellt der Unterschied direkt die am endgültig orientierten Richtungswert $[\alpha_A]$ . . . anzubringende Verbesserung v dar. Den unbekannten Verdrehungswinkel Z zerlegen wir, wie gewohnt, in einen Näherungswert ω und den unbekannten Zuschlag z, womit wir erhalten:

$$Z = \omega + z \tag{59}$$

und womit die im Neupunkt P endgültig orientierte gemessene Richtung wird:

$$(60) \qquad [\alpha] = \alpha + \omega + z\,.$$

Den Näherungsbetrag ω gewinnen wir, wenn wir das gemessene Strahlenbüschel mit dem Scheitel — statt auf den endgültigen, aber unbekannten Punkt P — vorerst auf den vorläufigen Punkt N legen und dann um ω so verdrehen, daß die Summe der Abweichungen l' der vorläufig orientierten Richtungswerte $\alpha_A + \omega$, $\alpha_B + \omega, \ldots$ von den zugehörigen vorläufigen Richtungswinkeln $(n\,PA)$, $(n\,PB) \ldots$ wird $= 0$, d. h.

$$\begin{aligned}&(n\,PA) - (\alpha_A + \omega) + (n\,PB) - (\alpha_B + \omega) + \cdots \\ &= \nu_A \;-\; \alpha_A^0 \;+\; \nu_B \;-\; \alpha_B^0 \;+ \cdots = [l'] = 0\,.\end{aligned}$$

In diesem Falle ist also der vorläufige Verdrehungswinkel:

$$\omega = \frac{(n\,PA) - \alpha_A + (n\,PB) - \alpha_B + \cdots + (n\,PR) - \alpha_R}{n_r}$$

$$(61) \quad \omega = \frac{\Sigma \text{ d. vorl. Richt.-Winkel} - \Sigma \text{ d. gemess. Richtgen.}}{n_r}$$

Die durch Addition von ω zu den gemessenen Richtungswerten α vorläufig orientierten, aber in ihrer gegenseitigen Lage dadurch nicht veränderten Richtungen $\alpha + \omega$ mögen heißen α^0. Wir haben für jeden Bestimmungsstrahl jetzt vier Werte zu unterscheiden, nämlich

1. die im Punkte N vorläufig orientierte, gemessene Richtung α^0,
2. den Richtungswinkel $(n\,PA)$, $(n\,PB) \ldots$ der Verbindungsstrecke vom vorläufigen Punkte N zum Festpunkte A, $B \ldots$,
3. die im Neupunkte P endgültig orientierte, gemessene *Richtung* $[\alpha] = \alpha + \omega + z = \alpha^0 + z$,

4. den Richtungswinkel $[n\,PA]$, $[n\,PB]$ ... der Verbindungsstrecke vom endgültigen Neupunkte P zum Festpunkte A, B ...

Die Werte (2) und (4) unterscheiden sich um die Änderung $d\varphi''$ am Richtungswinkel $(n\,PA)$ ..., welchen eine Verschiebung des Anfangspunktes N der Strecke NA ... um die Koordinatenzuschläge dx und dy, d. h. nach P hervorruft. Nach Gleichung (c) von § 23 ist also

$$[NPA] = (n\,PA) + \mathfrak{a}_A\,dx + \mathfrak{b}_A\,dy$$
$$[n\,PB] = (n\,PB) + \mathfrak{a}_B\,dx + \mathfrak{b}_B\,dy$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Bezeichnen wir endlich, wie gewohnt und schon oben angegeben, den Unterschied: vorläufiger Wert — Beobachtungswert hier $((n\,PA) = \nu) - \alpha_A^0$ mit l' und die Verbesserung des (endgültig orientierten) Beobachtungswertes $[\alpha]$ mit v, so erhalten wir die Fehlergleichungen:

$$v_A = [n\,PA] - [\alpha_A] = (n\,PA) + \mathfrak{a}_A\,dx + \mathfrak{b}_A\,dy - \alpha_A^0 - z$$
$$= \mathfrak{a}_A\,dx + \mathfrak{b}_A\,dy - z + l'_A$$
$$v_B = [n\,PB] - [\alpha_B] = (n\,PB) + \mathfrak{a}_B\,dx + \mathfrak{b}_B\,dy - \alpha_B^0 - z$$
$$= \mathfrak{a}_B\,dx + \mathfrak{b}_B\,dy - z + l'_B$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Ihre Zahl ist gleich derjenigen der beobachteten inneren Richtungen, also gleich n_r. Setzen wir, um den Koeffizienten der dritten Unbekannten positiv zu erhalten, $d\omega = -z$, so daß der gesuchte Verdrehungswinkel

$$Z = \omega + z = \omega - d\omega\,, \tag{59}$$

so gehen die Fehlergleichungen über in:

$$\left\{\begin{array}{l} v_A = d\omega + \mathfrak{a}_A\,dx + \mathfrak{b}_A\,dy + l'_A \\ v_B = d\omega + \mathfrak{a}_B\,dx + \mathfrak{b}_B\,dy + l'_B \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \end{array}\right. \tag{25e}$$

Die inneren Richtungen α, folglich auch die Absolutglieder l' sind gleichwertig. Man erhält daher unter Beachtung, daß der Koeffizient der ersten Unbekannten $d\omega$ (sonst a) jetzt 1 heißt, für die Bestimmung der drei Unbekannten $d\omega$, dx, dy die drei Normalgleichungen:

$$(26a) \begin{cases} n_r \cdot d\omega + [\mathfrak{a}]\,dx + [\mathfrak{b}]\,dy + [l'] = 0 \\ [\mathfrak{a}]\,d\omega + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}]\,dx + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,dy + [\mathfrak{a}\,l'] = 0 \\ [\mathfrak{b}]\,d\omega + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,dx + [\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}]\,dy + [\mathfrak{b}\,l'] = 0\,. \end{cases}$$

Der normale Weg der Auflösung erfordert nun zweimalige Reduktion der Normalgleichungen. Der Umstand aber, daß alle Koeffizienten der ersten Unbekannten $d\omega$ in den Fehlergleichungen einander gleich sind, ermöglicht eine Vereinfachung durch vorausgehende Eliminierung dieser Unbekannten.

Addiert man nämlich sämtliche Fehlergleichungen und beachtet, daß nach Gleichung (33) allgemein $[a\,v] = 0$, also bei $a_A = a_B = \ldots a_R = 1$, hier $[v] = 0$, so erhält man

$$[v] = n_r \cdot d\omega + [\mathfrak{a}]\,dx + [\mathfrak{b}]\,dy + [l'] = 0\,,$$

woraus die Durchschnittsgleichung

$$(62) \quad \frac{[v]}{n_r} = d\omega + \frac{[\mathfrak{a}]}{n_r}dx + \frac{[\mathfrak{b}]}{n_r}dy + \frac{[l']}{n_r} = 0\,.$$

Subtrahiert man diese Durchschnittsgleichung von jeder Fehlergleichung, so erhält man ein System reduzierter Fehlergleichungen mit nur zwei Unbekannten.

Setzt man noch die dabei entstehenden Differenzen, nämlich:

$$(63a) \quad \left(\mathfrak{a}_A - \frac{[\mathfrak{a}]}{n_r}\right) = \mathfrak{A}_A\,, \quad \left(\mathfrak{b}_A - \frac{[\mathfrak{b}]}{n_r}\right) = \mathfrak{B}_A\,, \quad \left(l'_A - \frac{[l']}{n_r}\right) = \mathfrak{L}_A$$

usw., so gehen die Fehlergleichungen (25e) über in

$$
(63)\quad \begin{cases}
v_A = \left(\mathfrak{a}_A - \dfrac{[\mathfrak{a}]}{n_r}\right) dx + \left(\mathfrak{b}_A - \dfrac{[\mathfrak{b}]}{n_r}\right) dy - \left(l'_A - \dfrac{[l']}{n_r}\right) \\
\qquad\qquad\qquad \equiv \mathfrak{A}_A\, dx + \mathfrak{B}_A\, dy - \mathfrak{L}_A \\
v_B = \left(\mathfrak{a}_B - \dfrac{[\mathfrak{a}]}{n_r}\right) dx + \left(\mathfrak{b}_B - \dfrac{[\mathfrak{b}]}{n_r}\right) dy - \left(l'_B - \dfrac{[l']}{n_r}\right) \\
\qquad\qquad\qquad \equiv \mathfrak{A}_B\, dx + \mathfrak{B}_B\, dy - \mathfrak{L}_B \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{cases}
$$

Das Absolutglied $\mathfrak{L}$ der Gleichungen (63) unterscheidet sich dabei in keiner Weise von dem Absolutgliede l' der Gleichungen (25e), weil infolge der Orientierung des gemessenen inneren Richtungsbüschels λ nach den vorläufigen Richtungswinkeln ν wird $[l'] = 0$, also auch $\dfrac{[l']}{n_r} = 0$.

Aus den Fehlergleichungen (63) erhält man jetzt zwei Normalgleichungen für die Berechnung der unbekannten Koordinatenzuschläge, nämlich

$$
(64)\quad \begin{cases}
[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]\, dx + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\, dy + [\mathfrak{A}\mathfrak{L}] = 0 \\
[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\, dx + [\mathfrak{B}\mathfrak{B}]\, dy + [\mathfrak{B}\mathfrak{L}] = 0
\end{cases}
$$

und durch Reduktion

$$
(65)\quad \begin{cases}
dy = -\dfrac{[\mathfrak{B}\mathfrak{L}\cdot 1]}{[\mathfrak{B}\mathfrak{B}\cdot 1]} \\
P_{dy} = P_y = [\mathfrak{B}\mathfrak{B}\cdot 1]
\end{cases}
$$

und, da die Zahl der nötigen Richtungen $= 3$, die der überschüssigen also $= n_r - 3$ ist,

$$
(66)\qquad M_y = \pm\sqrt{\frac{[\mathfrak{L}\mathfrak{L}\cdot 2]}{(n_r - 3)\,[\mathfrak{B}\mathfrak{B}\cdot 1]}}.
$$

Wollen wir schließlich noch den Verdrehun zuschlag $z = -d\omega$ berechnen, so liefert Gleichung (6

$$(67) \qquad z = -d\omega = \frac{[\mathfrak{a}]}{n_r} dx + \frac{[\mathfrak{b}]}{n_r} dy + \frac{[l']}{n_r} ,$$

und da $[l'] = 0$,

$$(67) \qquad z = -d\omega = \frac{[\mathfrak{a}]}{n_r} dx + \frac{[\mathfrak{b}]}{n_r} dy ,$$

womit im Abriß noch die Probe sich ergibt, daß der der Richtungsorientierung im endgültigen Neupunkt auftretende Verdrehungswinkel sein muß

$$(59) \qquad Z = \omega + z = \omega - d\omega .$$

Umstellung der Koeffizienten der Normalgleichung liefert auf gleiche Weise die zweite Unbekannte dx, Gewicht P_x und ihren mittleren Fehler M_x.

§ 24. Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für v einigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden.

Sind zur Bestimmung der Koordinaten x_P und eines Neupunktes P Winkel oder Richtungen sowohl den Festpunkten A, B . . . nach dem Neupunkt (äuß oder Vorwärtsrichtungen), als auch im Neupunkt na den Festpunkten beobachtet (innere oder Rückwär richtungen), so kann man für die ersteren die Fehl gleichungen des § 22, für die letzteren diejenigen § 23 gleichzeitig zur Anwendung bringen.

Man hat also statt n_v, wie im Falle des Vor-, o n_r, wie im Falle des Rückwärtseinschnittes, je $(n_v + n_r)$ Fehlergleichungen, wenn von den Festpunk zum Neupunkt herein n_v, vom Neupunkt zu den Fe punkten hinaus n_r Strahlen beobachtet wurden. *Koeffizienten* der Unbekannten in den Normalgleichung

setzen sich also aus $(n_v + n_r)$ Summanden zusammen. Wir erkennen ferner, daß die Richtungskoeffizienten a und $\mathfrak{a}$, bzw. b und $\mathfrak{b}$ der Fehlergleichungen nach Richtung und Größe einander gleich sind, wenn sie sich auf denselben Bestimmungsstrahl beziehen, d. h. wenn dieser zweiseitig, sowohl von außen nach innen, als von innen nach außen beobachtet wurde. Für den Strahl AP ist z. B.:

$$a_A = -\frac{\sin n AP}{AP} \varrho'' = +\frac{\sin n PA}{AP} \varrho'' = \mathfrak{a}_A$$

$$b_A = +\frac{\cos n AP}{AP} \varrho'' = -\frac{\cos n PA}{AP} \varrho'' = \mathfrak{b}_A ,$$

ebenso für den Strahl BP bzw. PB usw.

Nur die Gewichte p der Absolutglieder $l_A, l_B \ldots$, $l_1, l_2 \ldots$, $l'_A, l'_B \ldots$ bzw. $\mathfrak{L}_A, \mathfrak{L}_B \ldots$ verlangen jetzt, da gleichzeitig innere und äußere Richtungen zur Bestimmung der Unbekannten verwendet werden, noch eine vergleichende Untersuchung.

Als Gewicht p einer äußeren Richtung oder der Absolutglieder $l_A, l_B \ldots$ haben wir in § 22 für den Fall des Vorwärtseinschnittes festgestellt:

a) im Falle der Winkelmessung: $p_l = 1, 2 \ldots n_f$, wenn der Neustrahl durch $1, 2 \ldots n_f$ gemessene Winkel mit $1, 2 \ldots n_f$ Feststrahlen verbunden ist,

b) im Falle der Richtungsbeobachtung: $p_l = p_\beta = \frac{n_f}{n_f + 1}$, wenn außer dem Neustrahl noch n_f Feststrahlen dem beobachteten Richtungsbüschel angehören.

Die Gewichte p_i der inneren Winkel und Richtungen, oder der betreffenden Absolutglieder $l_1, l_2 \ldots$ bzw. l'_A, l'_B und $\mathfrak{L}_A, \mathfrak{L}_B$ sind für den Fall des Rückwärtseinschnittes je unter sich gleich, also nicht weiter zu be-

rücksichtigen. Sollen sie aber mit **äußeren** Richtungen in Verbindung gebracht werden, so müssen wir das Verhältnis der beiderseitigen Gewichte feststellen.

Dies ist bei vorhandener **Winkelmessung** sehr einfach, da bei gleich genauer Beobachtung jedem Winkel — gleichviel, ob sein Scheitel im Festpunkt oder im Neupunkt liegt — gleiches Gewicht zukommt.

Etwas anders ist es bei der Richtungsbeobachtung. Denken wir uns das innere Richtungsbüschel mit dem Scheitel im endgültigen Neupunkt P nach den benützten fehlerfreien Festpunkten A, $B\ldots$ orientiert, so wird jede beobachtete, orientierte Richtung um einen gewissen Fehlerbetrag von ihrem wahrscheinlichen Wert, dem Richtungswinkel $[nPA]$, $[nPB]\ldots$ abweichen, der sich wie bei der Ableitung S. 131 zusammensetzt aus dem Beobachtungsfehler m_α einer inneren Richtung und aus dem Fehler $m_Z = \frac{m_\alpha}{\sqrt{n_r}}$ des Verdrehungswinkels Z [s. Gleichung (59)]. Daher ist der mittlere Fehler einer orientierten inneren Richtung (im Falle der Beibehaltung dreier Unbekannten $d\omega$, dx, dy gleich demjenigen des Absolutgliedes l') analog (S. 131):

$$m_i = m_{l'} = m_\alpha \sqrt{\frac{n_r + 1}{n_r}},$$

und da m_α für innere und äußere Richtungen gleich ist analog Gleichung (56)

$$p_i \equiv p_{l'} = \frac{n_r}{n_r + 1}. \tag{68}$$

Wendet man das Verfahren der vorgängigen Eliminierung von $d\omega$ an, so wird das Absolutglied statt l':

$$\div \cdot \mathfrak{L} \equiv l' - \frac{[l']}{n},$$

und sein mittlerer Fehler

$$m_{\mathfrak{L}} = \sqrt{m_i^2 + \frac{m_i^2}{n_r}} = m_i \sqrt{\frac{n_r + 1}{n_r}} = m_\alpha \cdot \frac{n_r + 1}{n_r} .$$

Damit wird

$$p_{\mathfrak{L}} = \left(\frac{n_r}{n_r + 1}\right)^2 . \tag{68a}$$

Mit wachsendem n_r konvergieren $\frac{n_r}{n_r + 1}$ und $\left(\frac{n_r}{n_r + 1}\right)^2$ gegen 1. Da nun $n_r \gtreqless 4$, wenn im Falle des Rückwärtseinschnittes überhaupt von Ausgleichung die Rede sein soll, so setzen amtliche Vermessungsanweisungen der Einfachheit halber

$$p_i = p_r = p_{\mathfrak{L}} = 1 .$$

Die Zahl der überschüssigen Richtungen zum Zwecke der Fehlerberechnung ergibt sich aus der Betrachtung, daß im Falle der Richtungsbeobachtung zur Berechnung der drei Unbekannten dx, dy und z jedenfalls drei Bestimmungsstücke nötig, also $(n_v + n_r - 3)$ Stücke überschüssig sind.

Wir haben also bei vereinigtem Vor- und Rückwärtseinschneiden:

A) Im Falle der Winkelbeobachtung

	Fehlergleichungen	Gewicht p
n_v Gleichungen für n_v Zielungen vorwärts	$v_A = a_A\,dx + b_A\,dy + l_A$	n_{f_A}
	$v_B = a_B\,dx + b_B\,dy + l_B$	n_{f_B}
	$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$
n_r Gleichungen für n_r Zielungen rückwärts	$v_1 = \mathfrak{A}_1\,dx + \mathfrak{B}_1\,dy + l_1$	1
	$v_2 = \mathfrak{A}_2\,dx + \mathfrak{B}_2\,dy + l_2$	1
	$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$

Normalgleichungen

$$([paa] + [\mathfrak{A}\mathfrak{A}])\,dx + ([pab] + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}])\,dy + ([pal] + [\mathfrak{A}l]) = 0 ,$$

$$([pab] + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}])\,dx + ([pbb] + [\mathfrak{B}\mathfrak{B}])\,dy + ([pbl] + [\mathfrak{B}l]) = 0 .$$

Führt man für die Koeffizienten von dx und d den Normalgleichungen wieder die bisherigen Bez nungen ein, und setzt z. B.

$$([p\,a\,a] + [\mathfrak{A}\mathfrak{A}]) = [p\,a\,a] \quad \text{usw.},$$

so erhält man

$$dy = -\frac{[p\,b\,l \cdot 1]}{[p\,b\,b \cdot 1]}$$

$$P_y = [p\,b\,b \cdot 1]$$

$$M_y = \pm \sqrt{\frac{[p\,l\,l \cdot 2]}{[p\,b\,b \cdot 1]\,(n_v + n_r - 2)}}\,.$$

B) Im Falle der Richtungsbeobachtung und:

1. der Beibehaltung der dritten Unbekannten $d\omega$:

	Fehlergleichungen	Gewicht p Beobachtu oder des Abs gliedes	
n_v Gleichungen für n_v Zielungen vorwärts	$v_A = a_A\,dx + b_A\,dy + l_A$	$\frac{n_{f_A}}{n_{f_A}+1}$	
	$v_B = a_B\,dx + b_B\,dy + l_B$	$\frac{n_{f_B}}{n_{f_B}+1}$	
	$\vdots$	$\vdots$	
n_r Gleichungen für n_r Zielungen rückwärts	$v_A = d\omega + \mathfrak{a}_A\,dx + \mathfrak{b}_A\,dy + l'_A$	$\frac{n_r}{n_r+1}$	od nä
	$v_B = d\omega + \mathfrak{a}_B\,dx + \mathfrak{b}_B\,dy + l'_B$	$\frac{n_r}{n_r+1}$	
	$\vdots$	$\vdots$	

Normalgleichungen

$$[p_r]\,d\omega + [p_r\,\mathfrak{a}]\,dx + [p_r\,\mathfrak{b}]\,dy + [p_r\,l'] = 0\,,$$

$$[p_r\,\mathfrak{a}]\,d\omega + ([p_v\,a\,a] + [p_r\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}])\,dx + ([p_v\,a\,b] + [p_r\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}])\,dy + ([p_v\,a\,l] + [p$$

$$[p_r\,\mathfrak{b}]\,d\omega + ([p_v\,a\,b] + [p_r\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}])\,dx + ([p_v\,b\,b] + [p_r\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}])\,dy + ([p_v\,b\,l] +$$

Führt man für die Koeffizienten der Unbekannten in den Normalgleichungen wieder die bisherigen Bezeichnungen ein und setzt:

$$[p_{r'}] = [p\,a\,a]\,, \quad [p_{r'}\,\mathfrak{a}] = [p\,a\,b]\,, \quad [p_{r'}\,\mathfrak{b}] = [p\,a\,c]\,,$$

$$([p_v\,a\,a] + [p_{r'}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}]) = [p\,b\,b]\,, \quad ([p_v\,a\,b] + [p_{r'}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]) = [p\,b\,c]$$

usw.,

so hat man

$$dy = -\frac{[p\,c\,l \cdot 2]}{[p\,c\,c \cdot 2]}\,,$$

$$P_y = [p\,c\,c \cdot 2]\,,$$

$$M_y = \pm\sqrt{\frac{[p\,l\,l \cdot 3]}{[p\,c\,c \cdot 2]\,(n_v + n_{r'} - 3)}}\,.$$

Im Falle der Richtungsbeobachtung und:

2. der vorgängigen Eliminierung der Unbekannten $d\omega$:

	Fehlergleichungen	Gewicht p der Beobachtung oder des Absolutgliedes
n_v Gleichungen für n_v Zielungen vorwärts	$v_A = a_A\,dx + b_A\,dy + l_A$	$\frac{n_{f_A}}{n_{f_A} + 1}$
	$v_B = a_B\,dx + b_B\,dy + l_B$	$\frac{n_{f_B}}{n_{f_B} + 1}$
	$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$
$n_{r'}$ Gleichungen für $n_{r'}$ Zielungen rückwärts	$v_A = \mathfrak{A}_A\,dx + \mathfrak{B}_A\,dy + \mathfrak{L}_A$	$\left(\frac{n_{r'}}{n_{r'} + 1}\right)^2$ oder genähert 1
	$v_B = \mathfrak{A}_B\,dx + \mathfrak{B}_B\,dy + \mathfrak{L}_B$	$\left(\frac{n_{r'}}{n_{r'} + 1}\right)^2$
	$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots$

Normalgleichungen

$$([p_v\,a\,a] + [p_{r'}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}])\,dx + ([p_v\,a\,b] + [p_{r'}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}])\,dy + ([p_v\,a\,l] + [p_{r'}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{L}]) = 0.$$

$$([p_v\,a\,b] + [p_{r'}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}])\,dx + ([p_{r'}\,b\,b] + [p_{r'}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}])\,dy + ([p_{r'}\,b\,l] + [p_{r'}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{L}]) =$$

Führt man für die Koeffizienten der Unbekannt den Normalgleichungen wieder die bisherigen Bez nungen ein, setzt also

$$([p_v\, a\, a] + [p_r\, \mathfrak{A}\mathfrak{A}]) = [p\, a\, a] \quad \text{usw.},$$

so wird

$$dy = -\frac{[p\, b\, l \cdot 1]}{[p\, b\, b \cdot 1]},$$

$$P_y = [p\, b\, b \cdot 1],$$

$$M_y = \pm \sqrt{\frac{[p\, l\, l \cdot 2]}{[p\, b\, b \cdot 1]\,(n_v + n_r - 3]}}.$$

Zahlenbeispiel.

Zur Bestimmung der rechtwinkligen Koordinaten trigonometrischen Neupunktes 1 wurden auf ihm Richtu nach benachbarten Dreieckspunkten und in letzteren s nach dem Neupunkte beobachtet. Die Koordinaten de nutzten Dreieckspunkte sind bekannt und als fehlerfre zunehmen.

Gemessen wurde:

Im Neupunkte 1 nach	Killesberg	399° 99′ 64″
	Feuerbach	122° 19′ 08″
	Eychen	189° 23′ 41″
	Zuffenhausen	232° 97′ 25″
In Sandäcker nach	Eychen	355° 00′ 62″
	Feuerbach	399° 97′ 65″
	Neupunkt 1	4° 68′ 37″
	Killesberg	16° 78′ 41″
In Eychen nach	Feuerbach	49° 14′ 48″
	Neupunkt 1	399° 98′ 99″
	Killesberg	2° 37′ 63″
In Killesberg nach	Feuerbach	0° 03′ 93″
	Eychen	49° 27′ 69″
	Neupunkt 1	57° 66′ 26″
	Stammheim	67° 53′ 09″

In Killesberg nach	Kornwestheim	89° 31′ 12″
	Cannstatt	172° 27′ 10″
	Berg	191° 02′ 75″
	Falget	314° 31′ 56″
	Weil im Dorf	392° 84′ 22″ .

Gegebene Koordinaten:

	x +	y +
Berg	30796,55	11731,96
Cannstatt	31781,93	12010,25
Eychen	32632,85	8101,42
Falget	31114,51	8061,89
Feuerbach	31962,93	7858,74
Killesberg	31690,30	8485,65
Kornwestheim	38572,02	10181,79
Sandäcker	31940,47	7360,85
Stammheim	36512,78	7999,98
Zuffenhausen	34691,00	9175,86
Weil im Dorf	32949,64	4372,99

Lösung: Für den Neupunkt 1 seien auf irgendwelche Weise die Näherungskoordinaten:

$$N_X = +31909{,}96\,, \qquad N_Y = +8428{,}22$$

ermittelt worden.

Mittels der Formel:

$$\operatorname{tg} n\,AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

seien ferner die in Spalte 4 von Formular 1 (Abriß) mit senkrechten Ziffern eingetragenen Richtungswinkel φ der Verbindungsstrecken zwischen den durch obige Koordinaten bestimmten Festpunkten berechnet. Damit erfolgt die Orientierung der in den Festpunkten beobachteten und in Spalte 3 des Formulares 1 eingetragenen Richtungsbüschel α.

Der hierfür nötige Verdrehungswinkel ω ist in Spalte 5, *die orientierten* Richtungen β (worunter auch diejenige des

Neustrahles) sind in Spalte 6 und die hiernach sich ergebenden Beobachtungsverbesserungen v für die Feststrahlen in Spalte 7 berechnet.

Die orientierten Richtungen β werden jetzt aus Formular 1 als „Richtungen vorwärts", die im Neupunkte beobachteten Richtungen α direkt aus dem Feldbuch als „Richtungen rückwärts" in das Formular 2, Abteilung 1, Spalte 3 übertragen. Gleichzeitig erfolgt der Eintrag der in Formular 1 zur Orientierung der Vorwärtsrichtungen benutzten Zahl von Feststrahlen n_f in Spalte 5 und die Berechnung der Richtungsgewichte $p = \frac{n_f}{n_f + 1}$ (den Richtungen rückwärts möge durchweg das Gewicht 1 zugeschrieben werden). Hieraus ergeben sich die Gewichtsfaktoren $\sqrt{p}$ in Spalte 8 des Formulares 2 (Abteilung 1). Durch die Orientierung der Vorwärtsrichtungen (Verdrehung des ganzen Büschels der in den Festpunkten beobachteten Richtungen um den Winkel ω) in Formular 1 ist an deren gegenseitiger Lage, also an ihrer Eigenschaft als Beobachtungswerte, materiell nichts geändert. Mit ihnen werden nun die aus den Näherungskoordinaten für den Neupunkt abgeleiteten Richtungswinkel $\nu = (NAP), (NBP) \ldots$ (s. Spalte 4 der Abteilung 1 von Formular 2) verglichen, wobei sich in Spalte 6 die Absolutglieder l der Fehlergleichungen für die Vorwärtsrichtungen ergeben.

Auch die Rückwärtsrichtungen α sollten, und zwar zunächst nach den vorläufigen Richtungswinkeln ν (s. Spalte 4 von Formular 2), vorläufig orientiert werden:

$$\alpha_0 = \alpha + \omega \, ,$$

wodurch sich dann die Absolutglieder l' ergeben würden aus:

$$l' = \nu - \alpha_0 = (\nu - \alpha) - \omega \, .$$

Die letztere Gleichung zeigt aber, daß zur Bildung dieser Absolutglieder die Durchführung der vorläufigen Orientierung entbehrlich ist: wir finden sie kürzer als Überschuß der Einzelwerte $(\nu - \alpha)$ für den Verdrehungswinkel über dessen Mittelwert ω.

Gleichzeitig mit der Berechnung der Richtungswinkel φ *der Verbindungsstrecken* vom vorläufigen Punkte 1 nach

den zu seiner endgültigen Bestimmung zu benützenden Festpunkten oder umgekehrt mögen die Strecken selbst

$$s = \frac{\Delta y}{\sin\varphi} = \frac{\Delta x}{\cos\varphi}$$

und die Richtungskoeffizienten

$$\mathfrak{a} = \frac{\sin\varphi}{s}\varrho\,, \quad \mathfrak{b} = -\frac{\cos\varphi}{s}\varrho$$

(φ vom Neupunkt zum Festpunkt) logarithmisch oder mittels eines speziellen Hilfsmittels (Tabelle, Rechenschieber, Diagramm) gewonnen worden sein. Letztere werden in Spalte 7 des Formulares 2 eingetragen.

Zur Erzielung bequemer Rechnung sind möglichst gleiche Zahlenwerte für die Absolutglieder l bzw. l' und für die Richtungskoeffizienten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (Koeffizienten der Fehlergleichungen) erwünscht. Dies wird erreicht durch Wahl solcher Maßeinheiten, welche der normalen Beobachtungsgenauigkeit und der mittleren Strahlenlänge angepaßt sind. Im vorliegenden Beispiele wird als Winkeleinheit (für l, l', ϱ) die Dekasekunde, als Streckeneinheit (für dx, dy, s) das Dezimeter gewählt.

Nun bilden wir in den Spalten 9—11 des Formulares 2, Abteilung 1 durch Multiplikation der Koeffizienten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und der Absolutglieder l je mit $\sqrt{p_\beta}$ die Koeffizienten $\mathfrak{a}\sqrt{p_\beta}$, $\mathfrak{b}\sqrt{p_\beta}$, $l\sqrt{p_\beta}$ der Fehlergleichungen für die Vorwärtsrichtungen, durch Subtraktion der Durchschnittswerte $\mathfrak{a}_0 = \frac{[\mathfrak{a}_r]}{n_r}$ und $\mathfrak{b}_0 = \frac{[\mathfrak{b}_r]}{n_r}$ für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von diesen Richtungskoeffizienten und Multiplikation mit $\sqrt{p_i}$ diejenigen für die Rückwärtsrichtungen

$$\left(\mathfrak{A} = (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0)\sqrt{p_i}\,; \quad \mathfrak{B} = (\mathfrak{b} - \mathfrak{b}_0)\sqrt{p_i}\,; \quad \mathfrak{L} = l'\sqrt{p_i}\right).$$

Für letztere besteht die Probe:

$$[\mathfrak{A}] = 0\,, \quad [\mathfrak{B}] = 0\,, \quad [\mathfrak{L}] = 0\,.$$

Schließlich erfolgt die Bildung der Summenglieder

$$s\sqrt{p_\beta} = \mathfrak{a}\sqrt{p_\beta} + \mathfrak{b}\sqrt{p_\beta} + l\sqrt{p_\beta}$$

für die Vorwärts-, bzw.

$$= \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{L}$$

für die Rückwärtsrichtungen, wobei die Rechenprobe sich ergibt:

$$\left[\begin{matrix}\mathfrak{a}\sqrt{p_\beta}\\ \mathfrak{A}\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}\mathfrak{b}\sqrt{p_\beta}\\ \mathfrak{B}\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}l\sqrt{p_\beta}\\ \mathfrak{L}\end{matrix}\right]=\left[s\sqrt{p_\beta}\right].$$

(Durch Benutzung dekadischer Ergänzungen wird die Summierung hier, wie auch später in Abteilung 2 des Formulares 2, erheblich bequemer.)

Die Berechnung der Koeffizienten der Normalgleichungen erfolgt in Abteilung 2 des Formulares 2. Zur Ausrechnung der einzelnen, hernach zu addierenden Quadrate und Produkte werden Logarithmen-, Quadrat- und Produktentafeln, Rechenmaschinen, oder — bei ungefähr gleich- und nicht allzu großen Koeffizienten — Rechenschieber benutzt. Die in Abteilung 2 gebildeten Koeffizienten der Normalgleichungen werden nach Abteilung 3 des Formulares 2 übertragen, wo die Reduktion der Gleichungen unter Beachtung der Rechenproben entsprechend dem Vordrucke und den früheren Ableitungen erfolgt. Abteilung 4 ist für die Berechnung der mittleren Fehler der Beobachtungswerte und der Unbekannten bestimmt.

Eine durchgreifende Rechenprobe erzielt man in Formular 1 nach Gewinnung der endgültigen Koordinaten des Neupunktes durch Aufstellung des „Abrisses" auch für ihn. Die Richtungswinkel φ von ihm nach den benutzten Festpunkten oder umgekehrt mögen nach den in der Einleitung hierfür angegebenen Formeln berechnet, und nach Spalte 3 des Abrisses sowohl zu den Festpunkten, als zum Neupunkt übertragen sein (vgl. schräge Ziffern). Das auf letzterem beobachtete Richtungsbüschel α wird, wie bisher, zum Zwecke der Orientierung um den Winkel $\omega=\frac{[\varphi-\alpha]}{n_r}$ verdreht, wobei die orientierten Richtungswerte β erscheinen. Dann muß dieser endgültige Verdrehungswinkel ω von dem in Spalte 5 der Abteilung 1 vom Formular 2 benutzten vorläufigen um den Betrag

$$z=\frac{[\mathfrak{a}]}{n_r}\,dx+\frac{[\mathfrak{b}]}{n_r}\,dy=\mathfrak{a}_0\,dx+\mathfrak{b}_0\,dy$$

abweichen:

$$\omega_{\text{endgültig}}=\omega_{\text{vorläufig}}+z\,.$$

Bildet man schließlich die Differenzen $v = \varphi - \beta$, und multipliziert jede Verbesserung v mit dem zugehörigen $\sqrt{p}$, so muß sein

$$[p v v] = [p l l \cdot 2] .$$

III. Abschnitt.

Bedingte Beobachtungen.

§ 25. Erklärung. Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Beobachtungsgrößen an sich voneinander unabhängig sind, bzw. nur insoweit zusammenhängen, als sie zur Ermittelung anderer Größen gemeinsam beitragen.

Nun gibt es aber eine Reihe von Aufgaben, in denen die mehrfach beobachteten Größen einer Anzahl (β) voneinander unabhängiger, streng zu erfüllender mathematischer Bedingungen genügen müssen, „bedingte, direkte Beobachtungen".

Sind z. B. die drei Winkel α, β, γ eines Dreiecks je mehrfach gemessen, so müssen sie (unbeschadet der Berechnung jedes einzelnen von ihnen nach der Formel $L = \frac{[pl]}{[p]}$) der Bedingung genügen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 R + \text{sphär. Exz.}$$

Die (etwa durch Einwägung ermittelten) Höhenunterschiede Δh der Endpunkte der Seiten eines geschlossenen Polygons müssen (abgesehen von der Mittelbildung im Falle mehrfacher Bestimmung jedes einzelnen Δh) der Bedingung genügen $[\Delta h] = 0$.

Ebenso müssen die Seiten s und die Brechungswinkel [illegible] eines geschlossenen Polygons, gleichgültig, ob sie [illegible]

facher Beobachtung gemittelt sind oder nicht, den drei Bedingungen genügen:

$$[\beta] = (2n - 4) \cdot R \quad \text{bzw.} \quad \dot{c} \cdot 2R$$
$$[\Delta x] = [s \cdot \cos\varphi] = 0$$
$$[\Delta y] = [s \cdot \sin\varphi] = 0\,,$$

wo φ die aus den Brechungswinkeln β abzuleitenden Richtungswinkel jeder Polygonseite in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem darstellen.

Die erste, wichtigste und häufig schwierigste Aufgabe der Ausgleichung ist im vorliegenden Falle die nach Zahl und Form richtige Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

Bedingungsgleichungen zwischen den Beobachtungswerten mehrerer Größen können auftreten, wenn zwischen diesen Größen ein mathematischer Zusammenhang infolge ihrer Zugehörigkeit zu einem abgeschlossenen Gebilde besteht. Ist die Zahl der beobachteten, nur durch jenen mathematischen Zusammenhang miteinander in Verbindung stehenden, sonst aber voneinander unabhängigen Größen gleich der Zahl der zur individuellen Existenz jenes Gebildes nötigen Bestimmungsstücke, so ist keine Überbestimmung vorhanden, also tritt auch keine Bedingungsgleichung auf. Jede weiter hinzutretende Beobachtungsgröße, welche in jenen mathematischen Zusammenhang eingeschlossen ist, liefert eine weitere Bedingungsgleichung.

Die Aufgabe der Ausgleichung bedingter Beobachtungen tritt in der geodätischen Praxis am häufigsten auf bei der Einschaltung von Nivellements- und Dreiecksnetzen.

Suchen wir daher als Beispiel die an einigen Dreiecksnetzen auftretenden Bedingungsgleichungen auf.

Im Falle ausgeführter Winkelbeobachtungen haben wir *dreierlei Gruppen* solcher Gleichungen, nämlich:

1. Punktgleichungen. Die Summe der in ununterrochener Folge um einen Punkt herumliegenden Winkel soll *R* betragen. Zur gegenseitigen Festlegung von *s* Strahlen raucht man

$$w = (s - 1)$$

nabhängige Winkel. Jeder weiter geιessene liefert eine 'unktgleichung.

2. Winkelsumιengleichungen. ›ie Summe der drei ›reieckswinkel soll ɜtragen:

$$2\,R + \text{Exzeß}.$$

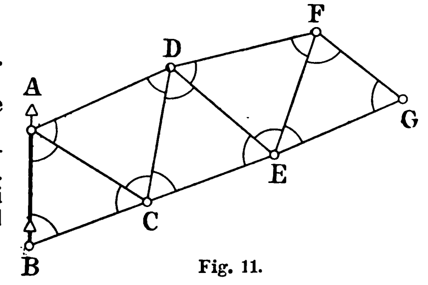


Fig. 11.

edes Dreieck, in welchem drei, jedes Viereck, in welchem vier sw. Winkel gemessen sind, liefert eine Winkelsummenleichung.

3. Seitengleichungen. Reiht sich Dreieck an Dreieck ɔ an, daß man von einer gegebenen Dreiecksseite ausgehend ie anderen nur in bestimmter Reihenfolge auf bestimmtem Veg ableiten kann, „Dreieckskette" (s. Fig. 11), so können

in	2	Dreiecken	1	Seite und	6	Winkel	=	7 Stücke
„	3	„	1	„ „	9	„	=	10 Stücke
„	4	„	1	„ „	12	„		usw.

ekannt sein, mittels welcher die gegenseitige Lage von , 5, 6 ... Punkten bestimmt ist.

Notwendig zu dieser Bestimmung sind bei p Punkten allemein $(2\,p - 3)$ voneinander unabhängiger Stücke (worunter ιch etwa befinden können 1 Seite und $2\,p - 4$ Winkel), also

ei	4	Punkt.	od. 2	Dreieck.	5	unabhäng.	Bestimmungsstücke,
„	5	„	„ 3	„	7	„	„
„	6	„	„ 4	„	9	„	„
	⋮		⋮		⋮		

Also sind unter obiger Voraussetzung

im Falle der aus 2 Dreiecken bestehenden Kette	2 Stücke	
" " " " 3 " " "	3 "	
" " " " 4 " " "	4 "	
⋮	⋮	

überschüssig, welche 2, 3, 4 ... Winkelsummengleichungen (für jedes Dreieck eine) liefern. Für Seitengleichungen bleibt in diesem Falle kein Raum.

Sind diagonale Strahlen beobachtet (s. Fig. 13), oder die Dreiecke so gruppiert, daß man zur Berechnung der Länge irgend einer ihrer Seiten von einer bekannten Seite ausgehend verschiedenerlei Winkel und Dreiecke wählen kann, „Dreiecksnetze" (s. Fig. 12 u. 14), so gewährleistet die Erfüllung der Punkt- und Winkelsummengleichungen noch nicht eine geschlossene Figur. Denn keine Methode der Winkelausgleichung wird uns die wahren Werte der gemessenen Winkel α verschaffen, auch die ausgeglichenen Werte sind noch mit Fehlern behaftet. Demgemäß werden sich für irgend eine der Strecken verschiedene Längen ergeben, wenn wir sie, unter Benutzung der, wenn auch nach Punkt- und Winkelsummengleichungen verbesserten Winkel, je aus anderen Dreiecken berechnen.

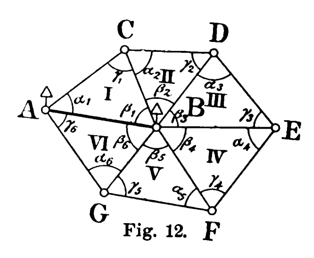


Fig. 12.

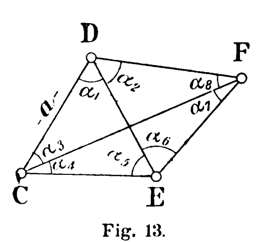


Fig. 13.

Im ganzen sind (wie oben angegeben) zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von p Punkten $2p-3$ unabhängige Stücke nötig. Sind eine Dreiecksseite und $[w]$ Winkel bekannt, so ist demnach die Zahl der überschüssigen Beobachtungen:

$$\beta = [w] - 2p + 4\,. \tag{69}$$

Dies ist gleichzeitig die Zahl der aufzustellenden Bedingungsgleichungen.

In Fig. 13 der gegenseitigen Festlegung von vier Punkten sind $2p - 3 = 5$ unabhängige Bestimmungsstücke nötig. Sind acht Winkel gemessen und eine Seite bekannt, so sind also $9 - 5 = 4$ Stücke übrig: wir müssen $\beta = 4$ unabhängige Bedingungsgleichungen aufstellen. Durch die drei unabhängigen Winkelsummengleichungen

$$\text{(a)} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 = 2R$$

$$\text{(b)} \qquad \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_6 + \alpha_7$$

$$\text{(c)} \qquad \alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_8$$

sind alle in der Figur möglichen Winkelsummengleichungen mit ausgedrückt. Als vierte Bedingung brauchen wir noch eine

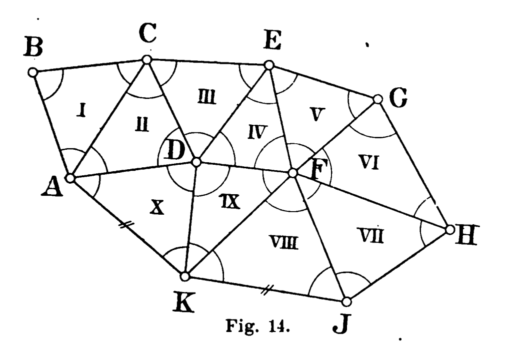


Fig. 14.

Seitengleichung, welche den linearen Schluß der Figur gewährleistet. Wir erhalten sie, wenn wir, von irgend einer Umfangsseite a (gleichgültig, ob ihre Länge bekannt ist oder nicht) ausgehend, die Umfangsseiten des Vierecks der Reihe nach eine aus der anderen ableiten, bis wir wieder zu a gelangen. Dann hebt sich a weg und wir erhalten:

$$\text{(d)} \qquad \frac{\sin\alpha_3 \sin\alpha_2 \sin\alpha_7 \sin\alpha_5}{\sin\alpha_8 \sin\alpha_6 \sin\alpha_4 \sin\alpha_1} = 1 .$$

In Fig. 12 haben wir neben einer Punkt- und sechs Winkelsummengleichungen die auf gleiche Weise erhaltene Seitengleichung:

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \sin\alpha_4 \sin\alpha_5 \sin\alpha_6}{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin\gamma_3 \sin\gamma_4 \sin\gamma_5 \sin\gamma_6} = 1$$

usw.

Da wir eine Seitengleichung im Falle der Dreieckskette nicht nötig hatten, dagegen eine solche (und eine weitere Winkelsummengleichung) bekommen, sobald wir in die Kette noch irgend einen zweiseitig beobachteten diagonalen Strahl einschalten (Fig. 13) oder die erstere durch Rückkehr auf die Ausgangsbasis zum Netz ausgestalten (Fig. 12), so erkennen wir: Ist nur eine Dreiecksseite bekannt, so ist die Zahl der Seitengleichungen gleich der Zahl der Dreiecksseiten, welche gestrichen werden müssen, um aus dem Dreiecksnetz eine Kette zu machen, die Zahl der Winkelsummengleichungen ist im Falle bloß zweiseitig beobachteter Strahlen gleich der Zahl von Dreiecken der durch Strahlenausschaltung erzielten Kette + der Zahl der gestrichenen Seiten. (Ist ein Punkt im Netz durch reinen Vorwärts- oder Rückwärtseinschnitt festgelegt, so liefert seine Existenz und diejenige seiner Bestimmungsstrahlen keine Winkelsummengleichung, beide bleiben für die Feststellung der Zahl der Bedingungsgleichungen außer Betracht.) Für jeden bloß einseitig beobachteten Strahl kommt aus der nach Vorigem festgestellten Zahl von Winkelsummengleichungen eine in Fortfall. Die übrigen Bedingungsgleichungen bis zur Gesamtzahl von $\beta = [w] - 2p + 4$ sind Punktgleichungen.

In Fig. 14 sind in 10 Dreiecken 30 Winkel gemessen, 1 Seite muß mindestens bekannt sein, gibt zusammen 31 bekannte Stücke. Nötig sind für die gegenseitige Festlegung der 10 Punkte: $2p - 3 = 17$ unabhängige Stücke. Also haben wir im ganzen $31 - 17 = 14$ Bedingungsgleichungen, und zwar 2 Punktgleichungen (bei D und F), 10 Winkelsummengleichungen und 2 Seitengleichungen. (Zum Zwecke der Zurückführung auf die Kette seien z. B. die Seiten AK und KJ gestrichen).

Man kann die Zahl der Bedingungsgleichungen statt *in der Zahl der* gemessenen Winkel auch in der Zahl *der beobachteten* Strahlen ausdrücken. Sind in einem Punkte

unabhängige Winkel gemessen, so ersetzen sie $w+1$ Richtungen. **Folglich ersetzen** $[w]$ in p Punkten gemessene unabhängige Winkel $[w]+p$ **Richtungen.** Setzen wir jeden **Strahl als zweiseitig beobachtet** voraus, so haben wir also mit $[w]$ in p **Punkten** gemessenen unabhängigen **Winkeln:** $s=\frac{[w]+p}{2}$ je zweiseitig beobachtete Strahlen. **Daraus erkennen** wir: Sind s je zweiseitig beobachtete Strahlen im Dreiecksnetz vorhanden, so ist — eine einzige Dreiecksseite als bekannt vorausgesetzt — die Zahl der Bedingungsgleichungen im ganzen

$$(70) \qquad \beta=[w]-2p+4=\underline{2s-3p+4}\,.$$

Daraus ergibt sich folgende

Zusammenstellung der obigen Untersuchungen.

Zahl der Netzpunkte (exkl. reine Vor- od. Rückwärtseinschnitte) $p=$	Zahl der zur Kettenverbindung nötigen Dreiecke	Zahl der zur Kette nötigen Strahlen	Von s zweiseitig beobachteten Netzstrahlen sind für die Dreieckskette überschüssig	Zahl der Winkelsummengleichungen
3	1	3	$s-3=0$	$0\quad+1=1$
4	2	5	$s-5$	$(s-5)+2=s-3$
5	3	7	$s-7$	$(s-7)+3=s-4$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p	$p-2$	$2p-3$	$s-(2p-3)$	$\{s-(2p-3)\}+p-2$ $=s-p+1$

Sind von den s Strahlen s' nur einseitig beobachtet, so tritt an Stelle von s in obiger Gleichung die Differenz $s-s'$, also Zahl der Winkelsummengleichungen

$$(71) \qquad \underline{(s-s')-p+1}\,.$$

Treten Richtungs- an Stelle der bisher vorausgesetzten Winkelbeobachtungen, so fallen die Punktgleichungen weg.

Die Zahl der zur Festlegung unserer [illegible]

ie zweiseitig beobachteten Strahlen sei wi

d. Gesamtzahl d. Bedingungsgleichungen also $\beta = 2s - 3p + 4$,
die Zahl der Winkelsummengleichungen ist $s - p + 1$,
folglich die Zahl der Seitengleichungen $s - 2p + 3$.

Sind unter den s Strahlen s' nur einseitig beobachtete (etwaige reine Vor- oder Rückwärtseinschnitte bleiben für die Zählung der Punkte und der Richtungen außer Betracht), so wird

die Zahl der Winkelsummengleichungen $= (s - s') - p + 1$
die Zahl der Seitengleichungen $= s - 2p + 3$
d. Gesamtz. d. Bedingungsgleichungen $\beta = 2s - s' - 3p + 4$.

Sind mehr als 2 Festpunkte durch ihre Koordinaten gegeben, so liefert der Anschlußzwang weitere Bedingungen. So sind in Fig. 15 in 6 Dreiecken 18 Winkel gemessen

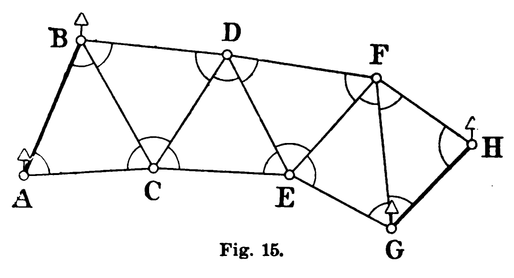


Fig. 15.

und überdies durch die 4 Festpunkte A, B, G und H 5 unabhängige Stücke unabänderlich bekannt. Nötig sind für die Bestimmung der gegenseitigen Lage der 8 Punkte 13 unabhängige Stücke, also brauchen wir für die Ausgleichung $18 + 5 - 13 = 10$ Bedingungsgleichungen. Hierunter sind 6 Winkelsummen- und 4 weitere Gleichungen, welche die Festhaltung der als fehlerfrei vorausgesetzten Bestimmungselemente für die gegenseitige Lage der 4 Festpunkte verbürgen. Von den letzteren sichern zwei das fehlerfrei gegebene Verhältnis der Streckenlängen AB und GH, AG und BH, zwei deren gegebene Divergenz.

§ 26. Ausgleichung bedingter, direkter, durch Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen.

Das Verfahren möge an einem Beispiele gezeigt werden:

Die Beobachtung der drei Winkel eines Dreieckes habe die gleich genauen Werte ergeben:

l_1 an Stelle von α
l_2 „ „ „ β
l_3 „ „ „ γ .

Die Bedingungsgleichung

(72a) $$\alpha + \beta + \gamma = 2\,R + \text{Exz.}$$

wird durch die Beobachtungswerte l nicht scharf erfüllt sein. Vielmehr wird ein Widerspruch w sich einstellen, über dessen Vorzeichen wir dem allgemeinen Gebrauche folgend verfügen wollen:

$$w = \text{Ist} - \text{Soll}.$$

Wir erhalten dann:

(72b) $$l_1 + l_2 + l_3 - (2\,R + E) = w\ .$$

Wir müssen nun jedem der Beobachtungswerte l für die Unbekannten α, β und γ eine Verbesserung v zuschlagen, so daß die Bedingungsgleichung (72a) durch die verbesserten Beobachtungswerte erfüllt ist:

(72c) $$(l_1 + v_1) + (l_2 + v_2) + (l_3 + v_3) = 2\,R + E$$

und wobei sich aus (72c) und (72b) ergibt:

(72d) $$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0\ .$$

Dabei müssen diese Verbesserungszuschläge v noch der allgemeinen Ausgleichungsbedingung entsprechen:

für gleich genaue Beobachtung: $[v\,v] = \text{Min.}$
für verschieden „ „ $[p\,v\,v] = \text{Min.}$

Die bisherigen Untersuchungen haben uns nun noch nicht gelehrt, auf welche Weise wir außer der letzteren und Hauptbedingung noch die Nebenbedingung (72a) bzw. (72d) berücksichtigen können. Am liebsten werden wir daher diese wegschaffen, indem wir mit ihrer

Hilfe eine der Unbekannten (etwa $\gamma = l_3 + v_3$) in de beiden anderen ausdrücken.

Wir erhalten dann (unter Weglassung des sphärische Exzesses)

$$\alpha = l_1 + v_1$$
$$\beta = l_2 + v_2$$
$$\gamma = l_3 + v_3 = 2R - (\alpha + \beta) = 2R - (l_1 + v_1 + l_2 + v_2)$$

Führen wir, wie bisher, für die Unbekannten α und β Näh rungswerte ein und bestimmen die ihnen noch zuzufügende Zuschläge x und y als neue Unbekannte, erklären wir endlic die Beobachtungswerte l_1 und l_2 selbst als solche Näherung werte, womit

$$\alpha = l_1 + x$$
$$\beta = l_2 + y$$
$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)\,,$$

so erhalten wir die Fehlergleichungen

$$v_1 = \alpha - l_1 \qquad = \quad x$$
$$v_2 = \beta - l_2 \qquad = \qquad y$$
$$v_3 = \gamma - l_3 = 2R - (l_1 + v_1 + l_2 + v_2) - l_3$$
$$= 2R - (l_1 + l_2 + l_3) - v_1 - v_2 = -x - y - w$$

deren Absolutglieder 0, 0, $-w$ durch Abzug der feste und als solche fehlerfreien Näherungswerte an Stelle vo l_1, l_2, l_3 getreten sind und mit ihnen gleiches Gewicht habe Aus den Koeffizienten und Absolutgliedern dieser Fehle gleichungen erhalten wir wie bisher diejenigen der Norma gleichungen:

	Koeffizient der Fehlergleichungen			Probe	Koeffizienten der Normalgleichungen						Probe
	a	b	l	s	aa	ab	al	bb	bl	ll	ss
1.	$+1$	0	0	$+1$	$+1$	0	0	0	0	0	$+1$
2.	0	$+1$	0	$+1$	0	0	0	$+1$	0	0	$+1$
3.	-1	-1	$-w$	$-w-2$	$+1$	$+1$	$+w$	$+1$	$+w$	$+w^2$	$(w^2 + 4w\cdot$
[illegible]	0	0	$-w$	$-w$	$+2$	$+1$	$+w$	$+2$	$+w$	$+w^2$	$w^2 + 4$

womit letztere lauten:

$$\begin{aligned} 2x + y \quad + w &= 0 \\ x + 2y + w &= 0 \end{aligned}$$

oder in abgekürzter Form samt den Koeffizientenproben:

$$\begin{array}{ccc|l} \underline{+2} & +1 & +w & 3+w \\ . & \underline{+2} & +w & 3+w \\ . & . & \underline{w^2} & w^2+2w \\ \hline . & . & . & \underline{w^2+4w+6} \end{array}$$

(in Übereinstimmung mit der direkten Rechnung).

Die früher gezeigte, gewöhnliche Reduktion liefert

$$y = \frac{\dfrac{-w}{2}}{\dfrac{3}{2}},$$

womit

$$\beta = l_2 - \frac{w}{3},$$

wie vorauszusehen war.

Das Gewicht des ausgeglichenen Winkels β ist:

$$P_y = P_\beta = \frac{3}{2},$$

der mittlere Fehler des Beobachtungswertes eines Winkels

$$m = \pm\sqrt{\frac{[ll \cdot 2]}{\lambda - \varkappa}} = \pm\sqrt{\frac{\dfrac{w^2}{3}}{1}} = \pm\frac{w}{\sqrt{3}},$$

woraus wir erhalten: den mittleren Fehler des ausgeglichenen Winkels

$$M_y = M_\beta = \frac{m}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}} = \pm\frac{w}{3}\sqrt{2}.$$

Ist die Zahl der Unbekannten wie bisher $=\varkappa$, die Zahl der zwischen ihnen bestehenden, streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen $= \beta$ (wobei natürlich $\beta < \varkappa$), so önnen wir mittels der letzteren, wie vorstehend für ne Bedingungsgleichung gezeigt, immer β der Ur

bekannten in den übrigen ausdrücken und damit diese β Unbekannte samt den Bedingungsgleichungen wegschaffen. Die allgemeine Ausgleichungsbedingung $[v\,v] =$ Min. oder $[p\,v\,v] =$ Min. liefert dann die Normalgleichungen zur Bestimmung der $\varkappa - \beta$ übrigen Unbekannten, ihrer Gewichte und mittleren Fehler für das Verfahren nach vermittelnden Beobachtungen.

§ 27. Ausgleichung bedingter, direkter, gleich genauer Beobachtungen mittels Korrelaten.

Die Wegschaffung der β Bedingungsgleichungen durch Eliminierung einer gleich großen Zahl von den $\varkappa$ Unbekannten ist theoretisch zwar immer möglich, führt aber häufig zu schwerfälligen Koeffizienten der Fehlergleichungen. Bequemer ist es in vielen Fällen, sämtliche $\varkappa$ Unbekannte beizubehalten, sie aber in β neuen Unbekannten k auszudrücken, über die wir hernach verfügen. Durch sie, die „Korrelaten", vermehren wir allerdings die Zahl der Unbekannten auf $(\varkappa + \beta)$, während wir sie nach dem Verfahren des § 26 auf $(\varkappa - \beta)$ herabdrückten. Gelingt es uns aber, die Beziehungen zwischen den β neuen und den $\varkappa$ eigentlichen Unbekannten einfach genug zu gestalten, so wird eine Rechenvereinfachung gegenüber dem Verfahren des § 26 eintreten können, sobald $\beta \leqq \varkappa - \beta$, d. h. $\beta \leqq \frac{\varkappa}{2}$.
Um jene Beziehungen zwischen den $\varkappa$ ursprünglichen und den β neuen Unbekannten (Korrelaten) einfach zu gestalten, sorgen wir zunächst dafür, daß die β durch die Werte der Unbekannten streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen lineare Form annehmen. Zu diesem Zwecke *führen wir die Beobachtungs- als Näherungswerte für die Unbekannten X . . .* ein, und betrachten die ihnen zu-

zufügenden Verbesserungen v als eigentliche Unbekannte $x, y \ldots$, so daß $X = l_1 + v_1 = l_1 + x$, $Y = l_2 + v_2 = l_2 + y$ usw. Mit diesem Kunstgriffe erzielen wir nebenbei noch eine erhebliche Rechenvereinfachung.

Die ursprünglichen, durch die gesuchten endgültigen Werte $X, Y \ldots$ der Beobachtungsgrößen zu erfüllenden β Bedingungsgleichungen:

$$(73\text{a}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(X, Y \ldots) = 0 \\ F_2(X, Y \ldots) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \leftarrow \beta \text{ Gl.} \rightarrow \text{(vertikal)} \\ \leftarrow \varkappa \text{ Unbekannte} \rightarrow \end{array}$$

sind voraussichtlich durch die Beobachtungswerte $l_1, l_2 \ldots$ nicht scharf erfüllt. Letztere liefern vielmehr die Gleichungen:

$$(73\text{b}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(l_1, l_2 \ldots) = w_1 \\ F_2(l_1, l_2 \ldots) = w_2 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{array} \right.$$

wobei die Werte w die Einflüsse der Beobachtungsfehler auf die Bedingungsgleichungen darstellen.

Die zur Wegschaffung der Widersprüche w den Beobachtungswerten l zuzufügenden Verbesserungen v sind gegenüber den Beobachtungswerten selbst jedenfalls so klein, daß wir höhere Potenzen von ihnen vernachlässigen dürfen. Dann liefert die Taylorsche Reihe an Stelle der Bedingungsgleichungen (a) die Gleichungen:

$$(73\text{c}) \left\{ \begin{array}{l} F_1(X, Y \ldots) \equiv F_1(l_1 + v_1, l_2 + v_2 \ldots) \\ \quad = F_1(l_1, l_2 \ldots) + v_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial l_1} + v_2 \dfrac{\partial F_1}{\partial l_2} + \cdots = 0 \\ F_2(X, Y \ldots) \equiv F_2(l_1 + v_1, l_2 + v_2 \ldots) \\ \quad = F_2(l_1, l_2 \ldots) + v_1 \dfrac{\partial F_2}{\partial l_1} + v_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial l_2} + \cdots = 0 . \end{array} \right.$$

Durch Subtraktion (c) — (b) erhalten wir

$$\begin{array}{l} v_1 \frac{\partial F_1}{\partial l_1} + v_2 \frac{\partial F_1}{\partial l_2} + \cdots + w_1 = 0 \\ v_1 \frac{\partial F_2}{\partial l_1} + v_2 \frac{\partial F_2}{\partial l_2} + \cdots + w_2 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}$$

und mittels der schon früher benutzten Substitutionen

$$(25\,d) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial l_1} = a_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial l_2} = a_2 \ldots \frac{\partial F_1}{\partial l_\varkappa} = a_\varkappa \\ \frac{\partial F_2}{\partial l_1} = b_1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial l_2} = b_2 \ldots \frac{\partial F_2}{\partial l_\varkappa} = b_\varkappa \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

die reduzierten Bedingungsgleichungen:

$$(73\,d) \quad \begin{cases} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + w_1 = 0 \quad \text{oder} \quad [a v] = -w_1 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + w_2 = 0 \quad \text{,,} \quad [b v] = -w_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

(← β Gl. →; ← $\varkappa$ Unbekannte v →)

Da $\varkappa > \beta$, reichen diese reduzierten Bedingungsgleichungen zur eindeutigen Bestimmung der unbekannten Zuschläge v nicht aus. Letztere müssen noch der allgemeinen Ausgleichungsbedingung genügen: $[v v] = \text{Min.}$

Für den jetzt vorliegenden Fall, in welchem die $\varkappa$ gesuchten Verbesserungsgrößen v außer der gewöhnlichen Minimumsbedingung noch β Nebenbedingungen genügen müssen, haben wir bekanntlich allgemein folgenden Weg der Lösung: Soll irgend eine Funktion $\varphi(X, Y, Z \ldots)$ zum Minimum werden, während die Veränderlichen $X, Y, Z \ldots$ noch β Bedingungen von der Form

$$\begin{array}{l} F_1(X, Y, Z \ldots) = 0 \\ F_2(X, Y, Z \ldots) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}$$

streng erfüllen müssen. so ...
eine andere, welche die erste ...
enthält. Werte für X, Y, Z ...
genügen, erfüllen auch die ...
tion ist z. B.

$$\varphi_1(X, Y, Z \ldots) = \ldots$$

wobei ϱ_1, ϱ_2 ... Koeffizienten ...
verfügen.

Wegen der Minimum...

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial X} = 0, \quad \ldots$$

und erhalten damit ...
vorhanden sind: nämlich ...
schließlich der β Neu...
die $x + \beta$ Unbekannten X, Y ...

Multiplizieren wir ...
dingungsgleichungen ...

so erhalten wir

$$(73e) \begin{cases} -2a_1 k_1 \ldots \\ -2b_1 k_1 \ldots \\ \vdots \end{cases}$$

Zu ihrer Summe addieren wir ...
machende Funktion

und ordnen nach ..., womit wir erhalten

$$(74) \begin{cases} \varphi_1(v_1, v_2 \ldots v_n) = v_1^2 - 2v_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 \ldots) \\ \quad + v_2^2 - 2v_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 \ldots) \\ \quad + \ldots - 2(k_1 w_1 + \ldots) \end{cases}$$

Partielle Ableitung von φ_1 nach den $\varkappa$ Unbekannten $v_1, v_2 \ldots$ liefert die „$\varkappa$ Korrelatengleichungen":

$$(75)\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} = 2\,v_1 - 2\,(a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 + \cdots) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v_2} = 2\,v_2 - 2\,(a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 + \cdots) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

oder vereinfacht:

$$(75)\qquad \begin{cases} v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 + \cdots \\ v_2 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 + \cdots \\ \vdots \end{cases}$$

←— β Korrelaten k —→ ; ↕ $\varkappa$ Unbek. v

Damit haben wir die $\varkappa$ unbekannten Zuschläge v in den β zunächst ebenfalls noch unbekannten Korrelaten k ausgedrückt. Um letztere selbst zu finden, setzen wir die Verbesserungen v aus (75) in die β reduzierten Bedingungsgleichungen (73d) ein.

Durch Zusammenziehen erhalten wir dann β Normalgleichungen zur Berechnung der β Korrelaten k:

$$(76)\begin{cases} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + \cdots + w_1 = 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + \cdots + w_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

←— β Unbekannte k —→ ; ↕ β Gl.

Zur Ermittelung der Korrelaten k werden wir jetzt dasselbe Reduktionsverfahren und dieselben Rechenproben verwenden, wie bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Zur Erlangung der Unbekannten v, bzw. $X, Y \ldots$ setzen wir schließlich die berechneten Werte der Korrelaten in die Korrelatengleichungen (75) ein.

Hieraus ergibt sich allgemein folgender Weg der **Ausgleichung bedingter, direkter, gleich genauer Beobachtungen mittels Korrelaten:**

1. Aufstellung der β Bedingungsgleichungen zwischen den $\varkappa$ Beobachtungsgrößen $X, Y \ldots$ in der Form

$$(73a) \qquad F_1(X, Y \ldots) = 0 \,. \\ \vdots \qquad\qquad \vdots$$

2. Berechnung der Werte w, welche die rechte Seite dieser Bedingungsgleichungen annimmt bei Einsetzung der beobachteten Werte l an Stelle der gesuchten $X, Y \ldots$

$$(73b) \qquad F_1(l_1, l_2 \ldots) = w_1 \,. \\ \vdots \qquad\qquad \vdots$$

3. Berechnung der $\varkappa$ Koeffizienten $a, b \ldots$ aus jeder der β Bedingungsgleichungen F

$$(25d) \begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial l_1}, \quad a_2 = \dfrac{\partial F_1}{\partial l_2}, \quad a_3 = \dfrac{\partial F_1}{\partial l_3} \ldots a_\varkappa = \dfrac{\partial F_1}{\partial l_\varkappa} \\ b_1 = \dfrac{\partial F_2}{\partial l_1}, \quad b_2 = \dfrac{\partial F_2}{\partial l_2}, \quad b_3 = \dfrac{\partial F_2}{\partial l_3} \ldots b_\varkappa = \dfrac{\partial F_2}{\partial l_\varkappa} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

und Anschrieb der β reduzierten Bedingungsgleichungen

$$(73d) \begin{cases} [a\,v] \equiv a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots = -w_1 \\ [b\,v] \equiv b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots = -w_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

4. Berechnung der Koeffizienten $[a\,a], [a\,b] \ldots [b\,b] \ldots$ und Anschrieb der β Normalgleichungen für die β Korrelaten

$$(76) \begin{cases} [a\,a] k_1 + [a\,b] k_2 + \cdots + w_1 = 0 \,. \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

5. Reduktion der Normalgleichungen und Ausmittelung der rechts zuletzt stehenden Korrelaten k. Umsetzung der Koeffizienten und Berechnung der nun zuletzt stehenden Korrelaten usw.
6. Einsetzung der gefundenen Korrelaten in die Korrelatengleichung (75). Addition der nach Gleichung (75) gefundenen Verbesserungszuschläge

$$v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots$$
$$\vdots$$

zu $l_1, l_2 \ldots$, wodurch

$$l_1 + v_1 = X$$
$$l_2 + v_2 = Y$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

7. Bildung von $[v v]$ aus den Korrelatengleichungen (75).
8. Berechnung des mittleren Fehlers m einer Beobachtung. Durch die β Bedingungsgleichungen sinkt die Zahl der unabhängigen Unbekannten auf $(\varkappa - \beta)$. Die Zahl der Beobachtungen ist $= \varkappa$, folglich haben wir $\varkappa - [\varkappa - \beta] = \beta$ überschüssige Beobachtungen und und als mittleren Fehler einer Beobachtung:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v v]}{\beta}}\,. \tag{77}$$

Die Bildung der Fehlerquadratsumme $[v v]$ direkt aus den Verbesserungen v ist zwar deshalb nicht allzu umständlich, weil die letzteren (als Unbekannte) doch berechnet werden müssen. Gleichwohl ist es schon der Probe wegen wünschenswert, wie bei den vermittelnden Beobachtungen $[v v]$ auf anderem Wege zu gewinnen. Quadrieren wir jede der Korrelatengleichungen und *addieren*, so erhalten wir

$$\begin{aligned}[v\,v] = [a\,a]\,k_1 k_1 &+ [a\,b]\,k_1 k_2 + [a\,c]\,k_1 k_3 + \cdots \\ &+ [a\,b]\,k_1 k_2 + [b\,b]\,k_2 k_2 + [b\,c]\,k_2 k_3 + \cdots \\ &+ [a\,c]\,k_1 k_3 + [b\,c]\,k_2 k_3 + [c\,c]\,k_3 k_3 + \cdots \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\end{aligned}$$

woraus durch Vergleichung mit den Normalgleichungen (76):

(78) $[v\,v] = -k_1 w_1 - k_2 w_2 - k_3 w_3 - \cdots = -[k\,w]$.

Das in § 26 durch Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen gelöste Beispiel gestaltet sich jetzt wie folgt:

1. Einzige Bedingungsgleichung:

$$F(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma) \equiv \alpha + \beta + \gamma - 2\,R = 0\,.$$

2. Einsetzung der Beobachtungswerte liefert:

$$F(l_1\,,\,l_2\,,\,l_3) \equiv l_1 + l_2 + l_3 - 2\,R = w\,.$$

3. $\dfrac{\partial F}{\partial l_1} = 1 = a_1\,; \qquad \dfrac{\partial F}{\partial l_2} = 1 = a_2\,; \qquad \dfrac{\partial F}{\partial l^3} = 1 = a_3\,,$

so daß die reduzierte Bedingungsgleichung lautet:

$$v_1 + v_2 + v_3 = -w\,.$$

4. Hieraus kommt $[a\,a] = 3$ und die Normalgleichung

$$3\,k_1 + w = 0\,,$$

woraus

5. $$k_1 = -\frac{w}{3}\,.$$

Nun liefert die Korrelatengleichung (75) die Unbekannten:

6. $$\left\{\begin{aligned} v_1 &= a_1 k_1 = -\frac{w}{3} \\ v_2 &= a_2 k_1 = -\frac{w}{3} \\ v_3 &= a_3 k_1 = -\frac{w}{3} \end{aligned}\right\} \quad \text{und damit} \quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= l_1 + v_1 = l_1 - \frac{w}{3}\,. \\ \beta &= l_2 + v_2 = l_2 - \frac{w}{3}\,. \\ \gamma &= l_3 + v_3 = l_3 - \frac{w}{3}\,. \end{aligned}\right.$$

7. $$[v\,v] = -k_1 w_1 = \frac{w}{3} \cdot w = \frac{w^2}{3}\,.$$

8. $$m = \pm \sqrt{\frac{\frac{w^2}{3}}{1}} = \frac{w}{\sqrt{3}}\,.$$

§ 28. Ausgleichung bedingter, ungleich genauer Beobachtungen mittels Korrelaten.

Der Bau und Inhalt der von den Unbekannten stre zu erfüllenden Bedingungsgleichungen (73a) und (reduzierten Bedingungsgleichungen (73d) wird du den Genauigkeitsgrad der Beobachtungen l bzw. der Z schläge v nicht beeinflußt.

Deren ungleiche Genauigkeit ändert nur die Minimum bedingung in $\varphi_v \equiv [p\,v\,v] = \text{Min.}$, so daß die Gleichu (74) jetzt lautet:

$$\text{(74a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{1\,(v_1\, v_2 \ldots)} \equiv p_1 v_1^2 &- 2\,v_1 (a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots \\ + p_2 v_2^2 &- 2\,v_2 (a_2 k_1 + b_2 k_2 + \cdots \\ &- 2\,(k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots) = \text{Min} \end{aligned} \right.$$

Damit wird

$$\text{(75a)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} = 2\,p_1 v_1 - 2\,(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots) = 0 \\ &\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2} = 2\,p_2 v_2 - 2\,(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \cdots) = 0 \\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\text{woraus die Korrelatengleichungen:} \\ &v_1 = \frac{a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots}{p_1} = \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \cdots \\ &v_2 = \frac{a_2 k_1 + b_2 k_2 + \cdots}{p_2} = \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \cdots \\ &\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned} \right.$$

Wir erkennen, daß durch Einführung von Beobachtungsgewichten $p_1, p_2 \ldots$ lediglich die Koeffizienten $a, b \ldots$ der Korrelatengleichungen in

$$\frac{a_1}{p_1}, \quad \frac{b_1}{p_1} \ldots, \quad \frac{a_2}{p_2}, \quad \frac{b_2}{p_2} \ldots$$

übergehen.

Setzen wir die Ausdrücke für v wieder in die unveränderten reduzierten Bedingungsgleichungen (73d) ein und ziehen wieder zusammen, so erhalten wir wieder β Normalgleichungen zur Berechnung der β Korrelaten k:

$$(76\text{a}) \begin{cases} \left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + \cdots + w_1 = 0 \\ \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_3 + \cdots + w_2 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Die ganze Auflösung ist also gleich der des § 27, nur ist die rechte Seite der Korrelatengleichungen mit dem Gewicht derjenigen Beobachtung durchzudividieren, welcher die linksseitige Verbesserung v angehört.

Noch einfacher ist es, schon die reduzierten Bedingungsgleichungen (73d) umzuformen, so daß sie lauten:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{\sqrt{p_1}} v_1 \sqrt{p_1} + \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} v_2 \sqrt{p_2} + \cdots + w_1 &= 0 \\ \frac{b_1}{\sqrt{p_1}} v_1 \sqrt{p_1} + \frac{b_2}{\sqrt{p_2}} v_2 \sqrt{p_2} + \cdots + w_2 &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \end{aligned}$$

$\longleftarrow \varkappa$ Unbekannte $v \longrightarrow$ $\qquad \longleftarrow \beta$ Gleichg. $\longrightarrow$

Durch Substituierung von

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{a_1}{\sqrt{p_1}}, \quad \mathfrak{b}_1 = \frac{b_1}{\sqrt{p_1}}, \quad \mathfrak{v}_1 = v_1 \cdot \sqrt{p_1} \quad \text{usw.}$$

gehen sie über in:

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{v}_2 + \cdots + w_1 = 0$$
$$\mathfrak{b}_1 \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{v}_2 + \cdots + w_2 = 0 .$$

Jetzt hat man mit den Koeffizienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ . . . nau das Verfahren des § 27 anzuwenden und nur Schluß bei Berechnung der gesuchten Zuschläge v beachten, daß:

$$\mathfrak{a}_1 k_1 + \mathfrak{b}_1 k_2 + \mathfrak{c}_1 k_3 + \cdots = \mathfrak{v} = v_1 \sqrt{p_1} \ ,$$

folglich

$$v_1 = \frac{\mathfrak{v}_1}{\sqrt{p_1}}$$
$$v_2 = \frac{\mathfrak{v}_2}{\sqrt{p_2}}$$
$$\vdots$$

Zur Fehlerberechnung braucht man $[p v v] = [\mathfrak{v}$ woraus der mittlere Beobachtungsfehler:
der Gewichtseinheit

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{\beta}} = \pm \sqrt{\frac{[\mathfrak{v} \mathfrak{v}]}{\beta}} \ ,$$

einer Beobachtung vom Gewicht p

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}} \ .$$

Zahlenbeispiel.

Mittels geometrischer Einwägung wurden folgende Höl unterschiede zwischen fünf Punkten $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ *stimmt:*

Strecke Nr.	von	nach	Δh	Lösung der nivellierten Strecke	Zahl der Niv. Wiederholungen
1	*D*	*E*	+10,194 m	3,5 km	1
2	*E*	*B*	+10,659 „	2,6 „	1
3	*D*	*B*	+20,871 „	1,7 „	1
4	*D*	*C*	+40,791 „	1,0 „	1
5	*B*	*C*	+19,930 „	2,3 „	1
6	*A*	*E*	+38,460 „	4,2 „	2
7	*A*	*D*	+28,248 „	1,9 „	2
8	*A*	*C*	+69,076 „	2,8 „	2

Die Höhe des Festpunktes *A* ist zu 201,754 m gegeben. Welches sind die Höhen der übrigen Punkte?

Lösung. Die eingewogenen Strecken bilden zusammen vier geschlossene Figuren:

$$EDB,\quad CDA,\quad ADE,\quad BDC.$$

Bezeichnen wir die ausgeglichenen, zunächst noch unbekannten Werte für die eingewogenen Höhenunterschiede der Strecken mit X, wobei jeder dieser Unbekannten die in der Aufgabe gewählte Streckennummer als Index zukommt, so erhalten wir hieraus vier Bedingungsgleichungen, nämlich:

$$F_1(X\ldots) \equiv \quad X_1 + X_2 - X_3 = 0\,,$$

$$F_2(X\ldots) \equiv \quad X_4 - X_8 + X_7 = 0\,,$$

$$F_3(X\ldots) \equiv \quad X_1 - X_6 + X_7 = 0\,,$$

$$F_4(X\ldots) \equiv + X_3 - X_4 + X_5 = 0\,.$$

Durch partielle Ableitung der Bedingungsgleichungen nach den Unbekannten erhalten wir für den Fall gleichwertiger Beobachtungen die Koeffizienten der Korrelatengleichungen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_1} = a_1 = +1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_2} = a_2 = +1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_3} = a_3 = -1;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_4} = a_4 = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_5} = a_5 = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_6} = a_6 = 0;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_7} = a_7 = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_8} = a_8 = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_1} = b_1 = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_2} = b_2 = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_3} = b_3 = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_4} = b_4 = +1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_5} = b_5 = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_6} = b_6 = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_7} = b_7 = +1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_8} = b_8 = -1;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_1} = c_1 = +1; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_2} = c_2 = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_3} = c_3 = 0;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_4} = c_4 = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_5} = c_5 = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_6} = c_6 = -1;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_7} = c_7 = +1; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_8} = c_8 = 0;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_1} = d_1 = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_2} = d_2 = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_3} = d_3 = +1;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_4} = d_4 = -1; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_5} = d_5 = +1; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_6} = d_6 = 0;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_7} = d_7 = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_8} = d_8 = 0.$$

Die Einsetzung der beobachteten an Stelle der ausgeglichenen (zunächst unbekannten) Werte von $X\ldots$ liefert die Widersprüche:

$$F_1 \quad 10{,}194 + 10{,}659 - 20{,}871 = w_1 = -18 \text{ mm} = -1{,}8 \text{ cm},$$

$$F_2 \quad 40{,}791 - 69{,}076 + 28{,}248 = w_2 = -37 \text{ mm} = -3{,}7 \text{ cm},$$

$$F_3 \quad 10{,}194 - 38{,}460 + 28{,}248 = w_3 = -18 \text{ mm} = -1{,}8 \text{ cm},$$

$$F_4 \quad 20{,}871 - 40{,}791 + 19{,}930 = w_4 = +10 \text{ mm} = +1{,}0 \text{ cm}$$

Setzen wir als Gewichtseinheit eine einfach eingewogene Strecke von 1 km Länge fest und beachten, daß (gleiche Zielweiten vorausgesetzt) der mittlere Fehler einer geometrischen Einwägung wächst proportional zur Wurzel aus der Länge, ihr Gewicht also umgekehrt proportional zur Länge, so erhalten die beobachteten Höhenunterschiede die Gewichte:

$$p_1 = \frac{1}{3{,}5}; \quad p_2 = \frac{1}{2{,}6}; \quad p_3 = \frac{1}{1{,}7}; \quad p_4 = \frac{1}{1{,}0};$$

$$p_5 = \frac{1}{2{,}3}; \quad p_6 = \frac{2}{4{,}2}; \quad p_7 = \frac{1}{1{,}9}; \quad p_8 = \frac{2}{2{,}8}.$$

Damit gehen die Koeffizienten der Korrelatengleichungen über in:

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{a_1}{\sqrt{p_1}} = \sqrt{3{,}5}; \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} = \sqrt{2{,}6}; \quad \mathfrak{a}_3 = \frac{a_3}{\sqrt{p_3}} = -\sqrt{1{,}7};$$

$$\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}_5 = \mathfrak{a}_6 = \mathfrak{a}_7 = \mathfrak{a}_8 = 0.$$

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_3 = 0; \quad \mathfrak{b}_4 = \frac{b_4}{\sqrt{p_4}} = 1; \quad \mathfrak{b}_5 = \mathfrak{b}_6 = 0;$$

$$\mathfrak{b}_7 = \frac{b_7}{\sqrt{p_7}} = \sqrt{\frac{1{,}9}{2}}; \quad \mathfrak{b}_8 = \frac{b_8}{\sqrt{p_8}} = -\sqrt{\frac{2{,}8}{2}}.$$

$$\mathfrak{c}_1 = \frac{c_1}{\sqrt{p_1}} = \sqrt{3{,}5}; \quad \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_3 = \mathfrak{c}_4 = \mathfrak{c}_5 = 0;$$

$$\mathfrak{c}_6 = \frac{c_6}{\sqrt{p_6}} = -\sqrt{\frac{4{,}2}{2}}; \quad \mathfrak{c}_7 = \frac{c_7}{\sqrt{p_7}} = \sqrt{\frac{1{.}9}{2}}; \quad \mathfrak{c}_8 = 0.$$

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2 = 0; \quad \mathfrak{d}_3 = \frac{d_3}{\sqrt{p_3}} = \sqrt{1{,}7}; \quad \mathfrak{d}_4 = \frac{d_4}{\sqrt{p_4}} = -1;$$

$$\mathfrak{d}_5 = \frac{d_5}{\sqrt{p_5}} = \sqrt{2{,}3}; \quad \mathfrak{d}_6 = \mathfrak{d}_7 = \mathfrak{d}_8 = 0.$$

Wir haben damit die Koeffizienten der reduzierten *Bedingungsgleichungen* gefunden, welche uns diejenigen der *Normalgleichungen* zur Berechnung der vier Korrelaten vermitteln.

	a	b	c	d	aa +	ab	ac +	ad −	bb +	bc +	bd −	cc +
1.	+1,87	0	+1,87	0	3,5	0	3,5	0	0	0	0	3,5
2.	+1,61	0	0	0	2,6	0	0	0	0	0	0	0
3.	−1,30	0	0	+1,30	1,7	0	0	1,7	0	0	0	0
4.	0	1	0	−1,00	0	0	0	0	1	0	1	0
5.	0	0	0	+1,52	0	0	0	0	0	0	0	0
6.	0	0	−1,45	0	0	0	0	0	0	0	0	2,1
7.	0	+0,97	+0,97	0	0	0	0	0	0,95	0,95	0	0,9[illegible]
8.	0	−1,18	0	0	0	0	0	0	1,4	0	0	0
					7,8	0	3,5	1,7	3,35	0,95	1,0	6,5[illegible]

Aus den Normalgleichungen

$$\underline{7.8}\, k_1 + 0\, k_2 + 3{,}5\, k_3 - 1{,}7\, k_4 - 1{,}8 = 0\,,$$
$$0\, k_1 + \underline{3{,}35}\, k_2 + 0{,}95\, k_3 - 1{,}0\, k_4 - 3{,}7 = 0\,,$$
$$3{,}5\, k_1 + 0{,}95\, k_2 + \underline{6.55}\, k_3 + 0\, k_4 - 1{,}8 = 0\,,$$
$$-1{,}7\, k_1 - 1{,}0\, k_2 + 0\, k_3 + 5{,}0\, k_4 + 1{,}0 = 0$$

ergeben sich auf bekannte Weise die vier Korrelaten k_1. und aus ihnen mittels der Korrelatengleichungen die gewichtigen Verbesserungen $\mathfrak{v}$, welche durch Division $\sqrt{p}$ in die gesuchten, den Beobachtungswerten zuzuschlage Verbesserungen v übergehen.

Formular 2.

Unbekannte ax					
		l]		s]	
3,5	—	646,9	+	1132,0	
0,5	+	66,3	+	743,3	
4,5	+	204,0	—	357,0	
	+	987,4	+	406,8	[ ] ist 2282,1
	—	309,4	+	541,5	soll 2282,3
		l · 1]		s · 1]	
6,0	+	270,3	+	386,3	(statt + 386,3)
	+	678,0	+	948,3	(statt + 948,3)
	—	629,9	—	900,1	
		l · 2]		s · 2]	
	+	48,1	+	48,2	

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Verzeichnis der erschienenen Bände.

Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin u. Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.

Akustik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

— **Musikalische**, v. Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik u. Algebra v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität und an der Exportakademie des k. k. Handelsmuseums in Wien. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.

Altertümer, Die deutschen, v. Dr. Franz Fuhse, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.

Altertumskunde, Griechische, von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

— **Römische**, von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollb. Nr. 45.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— — — Repetitorium und Aufgabensammlung z. Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

— — **II:** Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.

— — — Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.

Analysis, Niedere, von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Professor an der Universität Breslau. Nr. 209.

Arbeiterversicherung, Die, von Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra v. Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. F. Wislicenus, Prof. a. d. Univers. Straßburg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.

Aufgabensammlg. z. Analyt. Geometrie d. Ebene v. O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.

— **Physikalische**, v. G. Mahler, Prof. der Mathem. u. Physik am Gymnas. in Ulm. Mit d. Resultaten. Nr. 243.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbildungen. Nr. 225.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Professor am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbild. Nr. 96.

Biologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Biologie der Tiere I: Entstehung u. Weiterbild. d. Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Professor a. d. Universität Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.

— — II: Beziehungen der Tiere zur organ. Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Bleicherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Buchführung. Lehrgang der einfachen u. dopp. Buchhaltung von Rob. Stern, Oberlehrer der Öff. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Doz. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

— **Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— — siehe auch: *Metalle.* — *Metalloide.*

Chemie, Geschichte der, von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 241.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.

Dampfmaschine, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda in Bremen. Mit 89 Abbildungen. Nr. 274.

Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. a. Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.
— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Professor am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.
– II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Professor a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel, Privatdozent in Breslau. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. Nr. 252.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.
-- II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.
- III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.

Epigonen, Die, des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Tafeln. Nr. 175.

Ethik von Professor Dr. [...] Achelis in Bremen. Nr. 90.

Exkursionsflora von Deutsch[...] zum Bestimmen der häufig[...] Deutschland wildwachsenden P[...] von Dr. W. Migula, Profe[...] der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 2[...]
— — 2. Teil. Mit 50 Abbil[...] Nr. 269.

Färberei. Textil-Industrie [...] Wäscherei, Bleicherei, Färberei [...] Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, [...] a. d. Preuß. höh. Fachschule f. T[...] dustrie i. Krefeld. M. 28 Fig. [...]

Fernsprechwesen, Das, vo[...] Ludwig Rellstab in Berlin. [...] Figuren und 1 Tafel. Nr. 1[...]

Festigkeitslehre von W. [...] Diplom-Ingenieur. Mit zahl[...] Figuren. Nr. 288.

Filzfabrikation. Textil-Indus[...] Weberei, Wirkerei, Posament[...] Spitzen- und Gardinenfabr[...] und Filzfabrikation von Pro[...] Gürtler, Direktor der Königl. Zentralstelle für Textil-Indus[...] Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 1[...]

Finanzwissenschaft v. Präside[...] R. van der Borght in Berlin. [...]

Fischerei und Fischzucht v. D[...] Eckstein, Prof. an der Forstak[...] Eberswalde, Abteilungsdirig[...] der Hauptstation des forstlich[...] suchswesens. Nr. 159.

Formelsammlung, Mathem[...] Repetitorium d. Mathematik, e[...] wichtigsten Formeln und Lehr[...] Arithmetik, Algebra, algebr[...] Analysis, ebenen Geometrie, [...] metrie, ebenen u. sphärischen [...] nometrie, math. Geographie, [...] Geometrie d. Ebene u. d. Rau[...] Different.- u. Integralrechn. v. [...] Bürklen, Prof. am Kgl. Realgy[...] Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. [...]
— **Physikalische,** von G. Mahle[...] am Gymnasium in Ulm. N[...]

Fortsetzung auf der 4. [...]

Geschichte, Österreichische, I: Von der Urzeit bis 1439 von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 104.
— — **II:** Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 105.
— **Römische,** von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.
— **Russische,** v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.
— **Sächsische,** von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
— **Schweizerische,** von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.
— **Spanische,** von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.
— **der Chemie** siehe: Chemie.
— **der Malerei** siehe: Malerei.
— **der Mathematik** s.: Mathematik.
— **der Musik** siehe: Musik.
— **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.
— **der Physik** siehe: Physik.
— **des deutschen Romans** s.: Roman.
— **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.
— **des deutschen Unterrichtswesens** siehe: Unterrichtswesen.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, von Dr. Ernst Bernheim, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 270.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Professor an d. Universität Breslau. I. II. Nr. 203. 204.

Gewichtswesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Gleichstrommaschine, Die, … Kinzbrunner, Ingenieur und … für Elektrotechnik an der Mu… School of Technology in Man… Mit 78 Figuren. Nr. 257.

Gletscherkunde von Dr. Fri… chacek in Wien. Mit 5 Abb… Text und 11 Tafeln. Nr. 15…

Gottfried von Straßburg. … mann von Aue, Wolfram … Eschenbach u. Gottfried von S… burg. Auswahl aus dem höf… mit Anmerkungen und Wört… von Dr. K. Marold, Prof. a… Friedrichskollegium zu Köni… i. Pr. Nr. 22.

Grammatik, Deutsche, und … Geschichte der deutschen Sprac… Schulrat Professor Dr. O. L… Dresden. Nr. 20.
— **Griechische, I:** Formenlehr… Dr. Hans Meltzer, Profes… der Klosterschule zu Maul… Nr. 117.
— — **II:** Bedeutungslehre und S… von Dr. Hans Meltzer, Profe… der Klosterschule zu Maul… Nr. 118.
— **Lateinische.** Grundriß der … nischen Sprachlehre von Pr… Dr. W. Votsch in Magdeburg.
— **Mittelhochdeutsche.** Der … lunge Nôt in Auswahl und … hochdeutsche Grammatik mit … Wörterbuch von Dr. W. G… Prof. a. d. Universität Rostock.
— **Russische,** von Dr. Erich Be… Professor an der Univ… Prag. Nr. 66.
— — siehe auch: Russisches Ges… buch. — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deu… von Prof. Th. de Beaux, Offi… l'Instruction Publique. Nr. …
— **Englische,** von E. E. Whitf… A., Oberlehrer an King Edw… Grammar School in Kin… Nr. 237.

[illegible]mlung Göschen [illegible]

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung [illegible]

[illegible]

Die Wechselkurse und die Handelspolitik. Nr. [illegible]

[illegible] Epos mit Anmerkungen [illegible]

[illegible] Wien. I. II. [illegible]

[illegible]ge. Die deutsche [illegible]
[illegible] Luitpold Jiriczek, Prof. [illegible]
[illegible] Universität Münster. Nr. [illegible]
[illegible]ch: Mythologie.

[illegible], Anorganische Chemi[e] [illegible] Dr. Gust. Rauter in Char[lottenb]urg. I: Die [illegible] und ihre Nebenzweige. Mit 12 [Tafeln.] Nr. 205.

[illegible] Salinenwesen, Kalisalze, [illegible]industrie und Verwandtes. [illegible] Tafeln. Nr. 206.

[illegible]: Anorganische Chemische Prä[parate]. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

[illegible]ilikate, der künstl. Bau[steine] und des Mörtels. I: Glas- [und ke]ramische Industrie von Dr. [Gust.] Rauter in Charlottenburg. [illegible] Tafeln. Nr. 233.

[illegible] Die Industrie der künstlichen [Baustei]ne und des Mörtels. Mit [illegible Taf]eln. Nr. 234.

[illegible]

Kompositionslehre. [illegible] von Stephan Krehl. [illegible] Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Körper, der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Professor an der Universität Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 189.

Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Künste, Die graphischen, von Carl Kampmann, Fachlehrer a. d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen und Beilagen. Nr. 75.

Kurzschrift siehe: Stenographie.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.

Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. M. Profil, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.

— **von Britisch-Nordamerika** von Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.

— **der Iberischen Halbinsel** von Dr. Fritz Regel, Professor an der Universität Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbildung. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 10 Textillustration. und 1 Karte. Nr. 244.

— **des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abbildungen u. 1 Karte. Nr. 258.

Landeskunde von S[…]
(Schweden, Norwegen[…]
von Heinr. Kerp, Lehr[…]
sium und Lehrer der[…]
Comenius-Seminar z[…]
11 Abbild. und 1 K[…]

— **des Königreichs W**[…]
von Dr. Kurt Hassert,[…]
Geographie an der Ha[…]
in Köln. Mit 16 Vo[…]
1 Karte. Nr. 157.

Landwirtschaftliche B[…]
von Ernst Langenbeck[…]
Nr. 227.

Leben, Deutsches, im[…]
hundert. Kulturh[…]
läuterungen zum […]
und zur Kudrun. […]
Dr. Jul. Dieffenbach[…]
i. B. Mit 1 Tafel[…]
bildungen. Nr. 93.

Lessings Emilia Galo[…]
leitung und Anmerkun[…]
Dr. W. Votsch. Nr. […]

— **Minna v. Barnhel**[…]
von Dr. Tomaschek. […]

Licht. Theoretische Ph[…]
Licht und Wärme. […]
Jäger, Professor an d[…]
Wien. Mit 47 Abbild[…]

Literatur, Althochd[…]
Grammatik, Übersetz[…]
läuterungen von T[…]
Professor am Realg[…]
Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmäler d[…]
Jahrhunderts. A[…]
erläutert von Dr. Her[…]
Direktor der Königin […]
Königsberg i. Pr. Nr[…]

— **des 16. Jahrhunde**[…]
tin Luther, Thom.[…]
das Kirchenlied de[…]
hunderts. Ausgew[…]
Einleitungen und An[…]
sehen von Prof. G[…]
lehrer am Nikol[…]
Leipzig. Nr. 7.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

Meereskunde, Physische, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Metalle (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Metalloide (Anorganische Chemie 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Professor an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Professor an der Universität Kiel. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther v. d. Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Professor an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Morphologie, Anatomie u. Physiologie der Pflanzen. Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

Münzwesen. Maß-, Münz- u wichtswesen von Dr. Aug. Professor an der Handelsch Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Thomas Murner und das Kird des 16. Jahrh. Ausgewähl mit Einleitungen und Anmerl versehen von Prof. G. Berlit, am Nikolaigymn. zu Leipzig.

Musik, Geschichte der alten mittelalterlichen, von D Möhler. Mit zahlreichen und Musikbeilagen. Nr. 121.

Musikalische Formenlehre (positionslehre) v. Stephan I. II. Mit vielen Notenbeis Nr. 149. 150.

Musikgeschichte des 17. un Jahrhunderts von Dr. K. ty in Stuttgart. Nr. 239.

— **des 19. Jahrhunderts** v K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 164. 165.

Musiklehre, Allgemeine, v. S Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Mythologie, Deutsche, vo Friedrich Kauffmann, Profes der Universität Kiel. Nr. 15.

— **Griechische und römisch** Dr. Herm. Steuding, Profes Kgl. Gymnasium in Wurzen.

— siehe auch: Heldensage.

Nautik. Kurzer Abriß des täg Bord von Handelsschiffen wandten Teils der Schiffahrt Von Dr. Franz Schulze, D der Navigations-Schule zu Mit 56 Abbildungen. Nr. 84

Nibelunge, Der, Nôt in A und Mittelhochdeutsche Gra mit kurzem Wörterbuch von Golther, Professor an der Uni Rostock. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsc 12. Jahrhundert.

Sammlung Göschen [illegible]

[illegible]

Petrographie von [illegible] Prof. a. d. Universität [illegible] Mit 15 Abbild. [illegible]

Pflanze, Die. [illegible] von Oberlehrer [illegible] Mit 96 Abbildungen. [illegible]

Pflanzenbiologie von [illegible] Prof. a. d. Forstakademie [illegible] Mit 50 Abbild. Nr. [illegible]

Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie von Dr. **W. Migula,** Professor an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.

Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Figuren. Nr. 122.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.

[illegible]

Physikalische Aufgaben [illegible] Mit den Resultaten [illegible]

Physikalische Formel[illegible] von G. Mahler, [illegible] Gymnasium in Ulm. [illegible]

Plastik, Die, des Aben[illegible] Dr. Hans Stegmann [illegible] am German. [illegible] Nürnberg. Mit [illegible]

Poetik, Deutsche, [illegible] Dozent a. d. [illegible]

Posamentiererei [illegible] Weberei, Wirkerei, [illegible] Spitzen- und [illegible] und [illegible] zu [illegible]

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Sprachwissenschaft, Romanische, von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Universität Wien. I: Lautlehre u. Wortlehre I. Nr. 128.

— — II: Wortlehre II u. Syntax. Nr. 250.

— **Semitische,** von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 291.

Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Professor an der Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298 u. 299.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Professor an d. Universität Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Statik, I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper v. W. Hauber, diplom. Ing. Mit 82 Fig. Nr. 178.

— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Mitglied des Kgl. Stenogr. Instituts Dresden. Nr. 246.

— Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses Oranienstein. Nr. 86.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Professor a. d. Universität Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 97.

Stilkunde von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.

Technologie, Allgemeine chemische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Teerfarbstoffe, Die, mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Telegraphie, Die elektrische, von Dr. Lud. Rellstab. M. 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk in Jena. Nr. 272.

— Die Entstehung des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Dir. der Königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

— III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre) von K. Walther und M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. Mit 54 Fig. Nr. 242.

Tierbiologie I: Entstehung und Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 33 Abbildungen. Nr. 131.

— II: Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Gießen. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Tierreich, Das, I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Figuren. Nr. 99.

Sammlung Schubert.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.
- **Mehrdimensionale Geometrie II. Teil: Die Polytope** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.
- **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil** v. Prof. E. Grimsehl in Hamburg. M. 6.—.
- **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—.
- **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.
- **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—.
- **Theorie der Elektrizität u. d. Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—.
- 43 **Theorie der ebenen algebraischen Kurven höh. Ordnung** v. Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. M. 10.—.
- 44 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen u. Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80.
- 45 **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.
- 46 **Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50.
- 48 **Thermodynamik II. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—.
- 49 **Nicht-Euklidische Geometrie** v. Dr. H. Liebmann, Leipzig. M. 6.50.
- 50 **Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung** von Dr. J. Horn, Professor an der Bergakademie zu Clausthal. M. 10.—.
- 51 **Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil** von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 8.—.

In Vorbereitung bzw. projektiert sind:

- **Elemente der Astronomie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
- **Mathematische Geographie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
- **Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen der darstellenden Geometrie** v. Prof. Erich Geyger in Kassel
- **Geschichte der Mathematik** von Prof. Dr. A. von Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.
- **Dynamik** von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
- **Technische Mechanik** von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
- **Geodäsie** von Professor Dr. A. Galle in Potsdam.
- **Allgemeine Funktionentheorie** von Dr. Paul Epstein in Straßburg.
- **Räumliche projektive Geometrie.**
- **Geometrische Transformationen II. Teil** von Professor Dr. Karl Doehlemann in München.
- **Elliptische Funktionen** von Dr. Karl Boehm in Heidelberg.
- **Allgem. Formen- u. Invariantentheorie.**
- **Kinematik** von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
- **Elektromagnet. Lichttheorie** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.
- **Gruppen- u. Substitutionentheorie** von Prof. Dr. E. Netto in Gießen.
- **Theorie der Flächen dritter Ordnung.**
- **Mathematische Potentialtheorie** v. Prof. Dr. A. Wangerin in Halle.
- **Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen** von Dr. ing. H. Reißner in Berlin.
- **Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau** von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.
- **Graphisches Rechnen** von Prof. Aug. Adler in Prag.
- **Partielle Differentialgleichungen** von Professor J. Horn in Clausthal.
- **Grundlagen der theoretischen Chemie** von Dr. Franz Wenzel in Wien













